Appunti sugli spazi di getti

Marco FERRARIS

Dipartimento di Matematica “Giuseppe Peano”
Università degli Studi di Torino

2023

Sommario

Per la teoria generale si veda, ad esempio, [4], [6] e [7].

....

1 Getti di ordine k di funzioni

Dato un punto $x \in \mathbb{R}^m$ indichiamo con $\boldsymbol{\mathcal{F}}_x(\mathbb{R}^m; \mathbb{R}^n)$ l'insieme delle funzioni f dove $U = \mathrm{Dom}(f) \subseteq \mathbb{R}^m$ è un intorno aperto del punto x ed $f \in \mathcal{C}^\infty(U; \mathbb{R}^n)$. Per ogni $y \in \mathbb{R}^n$ indicheremo con $\boldsymbol{\mathcal{F}}_x(\mathbb{R}^m; \mathbb{R}^n)_y$ il sottoinsieme delle funzioni $f \in \boldsymbol{\mathcal{F}}_x(\mathbb{R}^m; \mathbb{R}^n)$ tali che $f(x) = y$.

Dati un punto $x \in \mathbb{R}^m$ ed un punto $y \in \mathbb{R}^n$, diciamo che due funzioni $f_1, f_2 \in \boldsymbol{\mathcal{F}}_x(\mathbb{R}^m;\mathbb{R}^n)_y$, *sono equivalenti all'ordine k (nel punto x)* se $\forall r \in [1,\ldots,k] \subset \mathbb{N}$ si ha $D^r(f_1)(x) = D^r(f_2)(x)$. Equivalentemente possiamo chiedere che sia $t^k_x(f_1) = t^k_x(f_2)$, dove $t^k_x(\cdot)$ indica lo sviluppo in serie di Taylor all'ordine k nel punto x. La relazione $\sim_k$ così definita nell'insieme $\boldsymbol{\mathcal{F}}_x(\mathbb{R}^m;\mathbb{R}^n)_y$ è una relazione di equivalenza. La classe di equivalenza $[f]_{\sim_k}$ verrà indicata con $j^k_x(f)$ e verrà detta *getto di ordine k della funzione f nel punto x*; il punto x è detto *sorgente* del getto $j^k_x(f)$ mentre il punto $y = f(x)$ viene detto *immagine* del getto. L'insieme quoziente $\boldsymbol{\mathcal{F}}_x(\mathbb{R}^m;\mathbb{R}^n)_y/\sim_k$ verrà indicato con $J^k_x(\mathbb{R}^m;\mathbb{R}^n)_y$ ed ha una struttura naturale di varietà differenziabile, diffeomorfa alla varietà $S^0_1(\mathbb{R}^m;\mathbb{R}^n)\times\cdots\times S^0_k(\mathbb{R}^m;\mathbb{R}^n)$. Ovviamente si ha

$$\dim\left(J^k_x(\mathbb{R}^m;\mathbb{R}^n)_y\right) = n\cdot\left(\sum_{r=1}^{k}\binom{m+r-1}{r}\right) = n\cdot\left(\binom{m+k}{k}-1\right)$$

L'insieme $J^k_x(\mathbb{R}^m;\mathbb{R}^n)$ definito da

$$J^k_x(\mathbb{R}^m;\mathbb{R}^n) = \bigcup_{y\in\mathbb{R}^n} J^k_x(\mathbb{R}^m;\mathbb{R}^n)_y$$

ha una struttura naturale di varietà differenziabile, diffeomorfa alla varietà

$$\mathbb{R}^n \times S^0_1(\mathbb{R}^m;\mathbb{R}^n)\times\cdots\times S^0_k(\mathbb{R}^m;\mathbb{R}^n)\,.$$

La varietà $J^k_0(\mathbb{R}^m;\mathbb{R}^n)$ verrà spesso indicata con $T^k_m(\mathbb{R}^n)$. La funzione $\beta : J^k_x(\mathbb{R}^m;\mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathbb{R}^n$ definita da $\beta(j^k_x(f)) = f(x)$ è suriettiva, di classe $\mathcal{C}^\infty$ e la sua mappa tangente è suriettiva. La proiezione β

definisce una struttura di fibrato differenziale, con fibra tipo $J^k_0(\mathbb{R}^m;\mathbb{R}^n)_0$, le cui fibre sono $\beta^{-1}(y) = J^k_x(\mathbb{R}^m;\mathbb{R}^n)_y$.

Dimostrazione. Indicando con $t_x : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^m$ la traslazione definita da $t_x(p) = p + x$ e con $t_y : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ la traslazione definita da $t_y(q) = q + y$, la funzione

$$\begin{array}{rcccc} \psi & : & \boldsymbol{\mathcal{F}}_0(\mathbb{R}^m;\mathbb{R}^n)_0 & \longrightarrow & \boldsymbol{\mathcal{F}}_x(\mathbb{R}^m;\mathbb{R}^n)_y \\ & & f & \longmapsto & t_y \circ f \circ t_{-x} \end{array}$$

è biiettiva, con funzione inversa

$$\begin{array}{rcccc} \psi^{-1} & : & \boldsymbol{\mathcal{F}}_x(\mathbb{R}^m;\mathbb{R}^n)_y & \longrightarrow & \boldsymbol{\mathcal{F}}_0(\mathbb{R}^m;\mathbb{R}^n)_0 \\ & & g & \longmapsto & t_{-y} \circ g \circ t_x \end{array}$$

ed induce un diffeomorfismo

$$\begin{array}{rcccc} \bar{\psi} & : & J^k_0(\mathbb{R}^m;\mathbb{R}^n)_0 & \longrightarrow & J^k_x(\mathbb{R}^m;\mathbb{R}^n)_y \\ & & j^k_0(f) & \longmapsto & j^k_x(t_y \circ f \circ t_{-x}) \end{array}$$

che, in pratica, è l'identità

$$\{0\}\times\{0\}\times S^0_1(\mathbb{R}^m;\mathbb{R}^n)\times\cdots\times S^0_k(\mathbb{R}^m;\mathbb{R}^n) \longrightarrow \{x\}\times\{y\}\times S^0_1(\mathbb{R}^m;\mathbb{R}^n)\times\cdots\times S^0_k(\mathbb{R}^m;\mathbb{R}^n)$$

■

Ci sono altri due fibrati differenziali che considereremo spesso:

$$J^k(\mathbb{R}^m;\mathbb{R}^n)_y = \bigcup_{x\in\mathbb{R}^m} J^k_x(\mathbb{R}^m;\mathbb{R}^n)_y$$

$$\begin{aligned} J^k(\mathbb{R}^m;\mathbb{R}^n) &= \bigcup_{x\in\mathbb{R}^m} J^k_x(\mathbb{R}^m;\mathbb{R}^n) \\ &= \bigcup_{y\in\mathbb{R}^n} J^k(\mathbb{R}^m;\mathbb{R}^n)_y \end{aligned}$$

Ovviamente si ha

$$J^k(\mathbb{R}^m;\mathbb{R}^n) = \bigcup_{(x,y)\in\mathbb{R}^m\times\mathbb{R}^n} J^k_x(\mathbb{R}^m;\mathbb{R}^n)_y$$

Osservazione 1.1. [J^0]

Per convenzione estenderemo l'operatore J^k al caso $k = 0$ definendo:

$$\begin{aligned} J^0_x(\mathbb{R}^m;\mathbb{R}^n)_y &= \{x\}\times\{y\} \\ J^0_x(\mathbb{R}^m;\mathbb{R}^n) &= \{x\}\times\mathbb{R}^n \\ J^0(\mathbb{R}^m;\mathbb{R}^n)_y &= \mathbb{R}^m\times\{y\} \\ J^0(\mathbb{R}^m;\mathbb{R}^n) &= \mathbb{R}^m\times\mathbb{R}^n \\ j^0(f)(x) &= (x, f(x)) \end{aligned}$$

Per ogni $k \geq 0$ esiste una proiezione naturale

$$\pi^{k+1}_k : J^{k+1}_x(\mathbb{R}^m;\mathbb{R}^n)_y \longrightarrow J^k_x(\mathbb{R}^m;\mathbb{R}^n)_y$$

che induce proiezioni naturali

$$J^{k+1}_x(\mathbb{R}^m;\mathbb{R}^n) \longrightarrow J^k_x(\mathbb{R}^m;\mathbb{R}^n)$$

$$J^{k+1}(\mathbb{R}^m;\mathbb{R}^n)_y \longrightarrow J^k(\mathbb{R}^m;\mathbb{R}^n)_y$$
$$J^{k+1}(\mathbb{R}^m;\mathbb{R}^n) \longrightarrow J^k(\mathbb{R}^m;\mathbb{R}^n)$$

ognuna delle quali verrà indicata ancora con π_k^{k+1}. Le proiezioni π_k^{k+1} definiscono delle strutture di fibrato affine.

La varietà $J^k(\mathbb{R}^m;\mathbb{R}^n)$ ha una struttura di fibrato differenziabile con varietà di base $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$ e componendo con la prima proiezione $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ si ottiene un fibrato differenziabile

$$\pi^k : J^k(\mathbb{R}^m;\mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathbb{R}^m.$$

Le proiezioni π_h^k con $h \leq k$ e π^h sono legate dalle relazioni $\pi^h \circ \pi_h^k = \pi^k$.

Ogni funzione $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^m;\mathbb{R}^n)$ induce una sezione $j^k(f) : \mathbb{R}^m \longrightarrow J^k(\mathbb{R}^m;\mathbb{R}^n)$ definita da

$$j^k(f) : x \longmapsto j_x^k(f)$$

del fibrato $\pi^k : J^k(\mathbb{R}^m;\mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathbb{R}^m$. La sezione $j^k(f)$ è il *prolungamento di ordine* k della funzione f.

1.1 Composizione di getti di ordine k di funzioni

Date una funzione $f \in \boldsymbol{\mathcal{F}}_x(\mathbb{R}^m;\mathbb{R}^n)_y$ ed una funzione $g \in \boldsymbol{\mathcal{F}}_y(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^s)_z$ si ha che $g \circ f \in \boldsymbol{\mathcal{F}}_x(\mathbb{R}^m;\mathbb{R}^s)_z$. L'operazione di composizione di funzioni induce un'operazione associativa di composizione (o prodotto) di getti

$$\begin{array}{rccc} \bullet & : & J^k_y(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^s)_z \times J^k_x(\mathbb{R}^m;\mathbb{R}^n)_y & \longrightarrow & J^k_x(\mathbb{R}^m;\mathbb{R}^s)_z \\ & & (j^k_y(g), j^k_x(f)) & \longmapsto & j^k_y(g) \bullet j^k_x(f) := j^k_x(g \circ f) \end{array}$$

Osservazione 1.2. [Funzioni polinomiali]

La varietà $J^k(\mathbb{R}^m;\mathbb{R}^n)$ e isomorfa all'insieme $\mathrm{FP}^k(\mathbb{R}^m;\mathbb{R}^n)$ delle funzioni polinomiali di grado $\leq k$ dallo spazio vettoriale $\mathbb{R}^m$ allo spazio vettoriale $\mathbb{R}^n$. Ogni classe di equivalenza $j^k_x(f)$ contiene una sola funzione polinomiale che è lo sviluppo in serie di Taylor

$$t^k_x(f) : x' \longmapsto f(x) + \frac{1}{1!}D(f)(x)(x'-x) + \frac{1}{2!}D^2(f)(x)(x'-x)^2 + \ldots \frac{1}{k!}D^k(f)(x)(x'-x)^k$$

Per rappresentare la composizione $j^k_{f(x)}(g) \bullet j^k_x(f)$ possiamo definire $j^k_{f(x)}(g) \bullet j^k_x(f)$

$$j^k_{f(x)}(g) \bullet j^k_x(f) = j^k_x\left(t^k_x\left(t^k_{f(x)}(g) \circ t^k_x(f)\right)\right) = j^k_x\left(t^k_x\left(g \circ f\right)\right)$$

Il polinomio $t^k_{f(x)}(g) \circ t^k_x(f)$ è un polinomio di grado k^2 che non si comporta molto bene, ma il suo troncamento $t^k_x\left(t^k_{f(x)}(g) \circ t^k_x(f)\right) \equiv t^k_x\left(g \circ f\right)$ all'ordine k si comporta meglio.

Quando lavoriamo sulle varietà $J^k(\mathbb{R}^m;\mathbb{R}^n)$ utilizzeremo le componenti dei tensori simmetrici che rappresentano le derivate di ordine > 1 delle funzioni f tali che $j^k_p(f) \in J^k(\mathbb{R}^m;\mathbb{R}^n)$. Per introdurre coordinate naturali su $J^k(\mathbb{R}^m;\mathbb{R}^n)$ si procede come segue:

1. scegliamo il sistema di coordinate cartesiane canoniche x^α su $\mathbb{R}^m$,

2. scegliamo il sistema di coordinate cartesiane canoniche y^i su $\mathbb{R}^n$,

3. rappresentiamo la funzione f con le n funzioni $f^i = y^i \circ j^k(f) : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}$,

4. definiamo le coordinate y^i_α in modo tale $(y^i_\alpha \circ j^k(f))(x) = \partial_\alpha f^i(x)$,

5. definiamo le "coordinate simmetriche" $y^i_{\alpha\beta}$ in modo tale $(y^i_{\alpha\beta} \circ j^k(f))(x) = \partial_\beta \partial_\alpha f^i(x)$,

6. definiamo le "coordinate simmetriche" $y^i_{\alpha_1\ldots\alpha_r}$ in modo tale $(y^i_{\alpha_1\ldots\alpha_r} \circ j^k(f))(x) = \partial_{\alpha_r} \cdots \partial_{\alpha_1} f^i(x)$,

7. e così via fino alle "coordinate simmetriche" $y^i_{\alpha_1\ldots\alpha_k}$.

Le *"coordinate fibrate naturali simmetriche"* su $J^k(\mathbb{R}^m;\mathbb{R}^n)$ saranno $(x^\alpha, y^i, y^i_\alpha, y^i_{\alpha_1\alpha_2}, \ldots, y^i_{\alpha_1\ldots\alpha_k})$. Per ottenere un vero sistema di coordinate si possono limitare le "coordinate simmetriche" richiedendo che per le $y^i_{\alpha_1\ldots\alpha_r}$ valga la relazione $\alpha_1 \leq \alpha_2 \leq \ldots \leq \alpha_r$ (oppure utilizzare altri sistemi equivalenti come i multiindici).

Osservazione 1.3. [Multiindici]

Un multiindice di dimensione m è una m-upla $\underline{\boldsymbol{\nu}} = (\nu_1, \ldots, \nu_m) \in \mathbb{N}^m$. Definiamo:

1. la lunghezza $|\underline{\boldsymbol{\nu}}|$ del multiindice $\underline{\boldsymbol{\nu}}$ come la somma $|\underline{\boldsymbol{\nu}}| = \nu_1 + \ldots + \nu_m \geq 0$;

2. la somma di due multiindici $\underline{\boldsymbol{\nu}}$ e $\underline{\boldsymbol{\lambda}}$

$$\underline{\boldsymbol{\nu}} + \underline{\boldsymbol{\lambda}} = (\nu_1 + \lambda_1, \nu_2 + \lambda_2, \ldots, \nu_m + \lambda_m);$$

3. la relazione di ordine

$$\underline{\boldsymbol{\nu}} \leq \underline{\boldsymbol{\lambda}} \Longleftrightarrow \nu_1 \leq \lambda_1 \wedge \nu_2 \leq \lambda_2 \wedge \ldots \wedge \nu_m \leq \lambda_m$$

che ci permette di definire, quando $\underline{\boldsymbol{\lambda}} \leq \underline{\boldsymbol{\nu}}$, anche la differenza

$$\underline{\boldsymbol{\nu}} - \underline{\boldsymbol{\lambda}} = (\nu_1 - \lambda_1, \nu_2 - \lambda_2, \ldots, \nu_m - \lambda_m)$$

4. il $\underline{\mathbf{0}} = (0, \ldots, 0, \ldots, 0)$ ed il $\underline{\mathbf{1}}_\lambda \equiv (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0)$ che ha 1 in posizione λ e 0 in tutte le altre posizioni

5. il fattoriale $\underline{\boldsymbol{\nu}}!$ di un multiindice $\underline{\boldsymbol{\nu}}$

$$\underline{\boldsymbol{\nu}}! \equiv (\nu_1!)(\nu_2!) \ldots (\nu_m!)$$

6. il peso di un multiindice

$$w(\underline{\boldsymbol{\nu}}) \equiv \frac{\underline{\boldsymbol{\nu}}!}{|\underline{\boldsymbol{\nu}}|\,!}$$

Quando $k \geq 2$ le *coordinate fibrate naturali* su $J^k(\mathbb{R}^m; \mathbb{R}^n)$ saranno $(x^\alpha, y^i, y^i_\alpha, y^i_{\underline{\boldsymbol{\alpha}}})$, con $2 \leq |\underline{\boldsymbol{\alpha}}| \leq k$, oppure $(x^\alpha, y^i_{\underline{\boldsymbol{\alpha}}})$, con $0 \leq |\underline{\boldsymbol{\alpha}}| \leq k$, avendo posto $y^i_{\underline{\mathbf{0}}} = y^i$ e $y^i_\alpha = y^i_{\underline{\mathbf{1}}_\alpha}$.

Le *"coordinate fibrate naturali simmetriche"* $(x^\alpha, y^i, y^i_\alpha, y^i_{\alpha_1\alpha_2}, \ldots, y^i_{\alpha_1\ldots\alpha_k})$ su $J^k(\mathbb{R}^m; \mathbb{R}^n)$ sono legate alle coordinate fibrate naturali $(x^\alpha, y^i, y^i_\alpha, y^i_{\underline{\boldsymbol{\alpha}}})$ dalle relazioni

$$y^i_{\alpha_1\ldots\alpha_r} = y^i_{\underline{\mathbf{1}}_{\alpha_1} + \ldots + \underline{\mathbf{1}}_{\alpha_r}} \qquad (2 \leq r \leq k)$$

Data una funzione $f \in \mathcal{C}^\infty\big(J^k(\mathbb{R}^m;\mathbb{R}^n);\mathbb{R}\big)$, consideriamo il differenziale

$$
\begin{aligned}
df &= \frac{\partial f}{\partial x^\alpha}dx^\alpha + \frac{\partial f}{\partial y^i}dy^i + \frac{\partial f}{\partial y^i_\alpha}dy^i_\alpha + \sum_{|\underline{\boldsymbol{\alpha}}|=2}^{k} \frac{\partial f}{\partial y^i_{\underline{\boldsymbol{\alpha}}}}dy^i_{\underline{\boldsymbol{\alpha}}} \\
&= \vec{\partial}_\alpha(f)dx^\alpha + \vec{\partial}_i(f)dy^i + \vec{\partial}_i^{\alpha}(f)dy^i_\alpha + \vec{\partial}_i^{\alpha_1\alpha_2}(f)dy^i_{\alpha_1\alpha_2} + \ldots + \vec{\partial}_i^{\alpha_1\ldots\alpha_k}(f)dy^i_{\alpha_1\ldots\alpha_k}
\end{aligned}
$$

Ovviamente si ha

$$
\begin{aligned}
\vec{\partial}_\alpha(f) &= \frac{\partial f}{\partial x^\alpha} \\
\vec{\partial}_i(f) &= \frac{\partial f}{\partial y^i} \\
\vec{\partial}_i^{\alpha}(f) &= \frac{\partial f}{\partial y^i_\alpha}
\end{aligned}
$$

mentre le quantità $(\vec{\partial}_i^{\alpha_1\alpha_2}(f), \ldots, \vec{\partial}_i^{\alpha_1\ldots\alpha_r}(f), \ldots, \vec{\partial}_i^{\alpha_1\ldots\alpha_k}(f))$ sono definite in maniera univoca dalla richiesta di essere simmetriche negli indici controvarianti.

Tenendo conto dell'identità

$$
\frac{1}{r!}p_i^{\alpha_1\ldots\alpha_r}dy^i_{\alpha_1\ldots\alpha_r} = \sum_{|\underline{\boldsymbol{\alpha}}|=r} \frac{1}{\underline{\boldsymbol{\alpha}}!}p_i^{\underline{\boldsymbol{\alpha}}}dy^i_{\underline{\boldsymbol{\alpha}}}\,,
$$

dove i coefficienti simmetrici $p_i^{\alpha_1\ldots\alpha_r}$ sono definiti da

$$
p_i^{\alpha_1\ldots\alpha_r} = p_i^{\underline{\mathbf{1}}_{\alpha_1}+\ldots+\underline{\mathbf{1}}_{\alpha_r}}\,,
$$

si dimostra facilmente che

$$\vec{\partial}_i^{\alpha_1\ldots\alpha_r}(f) = w(\underline{\boldsymbol{\nu}})\frac{\partial f}{\partial y^i_{\underline{\boldsymbol{\nu}}}} \qquad \text{dove} \qquad \underline{\boldsymbol{\nu}} = \underline{\mathbf{1}}_{\alpha_1} + \ldots + \underline{\mathbf{1}}_{\alpha_r}$$

FINE LEZIONE 18 MMdFC (2023-05-02 ore 16:00 – 18:00)

Riferimenti bibliografici

[1] S. Kobayashi, K. Nomizu: *Foundations of Differential Geometry, Vol. I*; John Wiley & Sons, New York · Chichester · Brisbane · Toronto · Singapore, 1963.

[2] S. Kobayashi, K. Nomizu: *Foundations of Differential Geometry, Vol. II*; John Wiley & Sons, New York · Chichester · Brisbane · Toronto, 1969.

[3] J. Dieudonné: *Éléments d'analyse 1 / Fondements de l'analyse moderne*; Gauthier–Villars, Paris, 1969.

[4] J. Dieudonné: *Éléments d'analyse 3*; Gauthier–Villars, Paris, 1969.

[5] P.L. García–Pérez: *Connections and* 1*–jet Fiber Bundles*, Rend. Sem. Mat. Univ. Padova **47**, 227–242 (1972).

[6] I. Kolář, P.W. Michor, J. Slovák: *Natural Operations in Differential Geometry*, Springer–Verlag, Berlin Heidelberg 1993.

[7] P.J. Olver: *Equivalence, Invariants and Symmetry*; Cambridge University Press, 1995.

[8] J. E. Marsden, T. Ratiu, R. Abraham: *Manifolds, tensor analysis and applications, Third Edition*; Springer–Verlag, 2001.

[9] M. Ferraris: *Appunti di agebra lineare, multilineare e tensori*; 2023.

[10] M. Ferraris: *Appunti di calcolo differenziale*; 2023.

[11] M. Ferraris: *Appunti di calcolo sulle varietà differenziabili*; 2023.

[12] M. Ferraris: *Appunti sui gruppi di Lie*; 2023.