Esempio 1.1. [Composizione di getti del prim'ordine]

Quando $k = 1$ si ha

$$t^1_{\bar{x}}(f) : (x^\alpha) \longmapsto (f^i(\bar{x}) + f^i_\alpha(\bar{x})(x^\alpha - \bar{x}^\alpha))$$

e

$$t^1_{\bar{y}}(g) : (y^i) \longmapsto (g^B(\bar{y}) + g^B_i(\bar{y})(y^i - \bar{y}^i))$$

da cui si deduce che

$$t^1_{f(\bar{x})}(g) : (y^i) \longmapsto \big(g^B(f(\bar{x})) + g^B_i(f(\bar{x}))(y^i - f^i(\bar{x})) \big)$$

e

$$t^1_{f(\bar{x})}(g) \circ t^1_{\bar{x}}(f) : (x^\alpha) \longmapsto \big(g^B(f(\bar{x})) + g^B_i(f(\bar{x}))(f^i_\alpha(\bar{x})(x^\alpha - \bar{x}^\alpha))\big)$$

In questo caso non è necessario troncare al prim'ordine e si ha:

$$t^1_{f(\bar{x})}(g) \bullet t^1_{\bar{x}}(f) : (x^\alpha) \longmapsto \big(g^B(f(\bar{x})) + [g^B_i(f(\bar{x}))f^i_\alpha(\bar{x})](x^\alpha - \bar{x}^\alpha) \big)$$

Esempio 1.2. [Composizione di getti del second'ordine]

Quando $k = 2$ si ha

$$t^2_{\bar{x}}(f) : (x^\alpha) \longmapsto \big(f^i(\bar{x}) + f^i_\alpha(\bar{x})(x^\alpha - \bar{x}^\alpha) + \tfrac{1}{2} f^i_{\alpha\beta}(\bar{x})(x^\alpha - \bar{x}^\alpha, x^\beta - \bar{x}^\beta) \big)$$

e

$$t^2_{\bar{y}}(g) : (y^i) \longmapsto \left(g^B(\bar{y}) + g^B_i(\bar{y})(y^i - \bar{y}^i) + \tfrac{1}{2} g^B_{ij}(\bar{y})(y^i - \bar{y}^i, y^j - \bar{y}^j) \right)$$

da cui si deduce che

$$t^2_{f(\bar{x})}(g) : (y^i) \longmapsto \left(g^B(f(\bar{x})) + g^B_i(f(\bar{x}))(y^i - f^i(\bar{x})) + \tfrac{1}{2} g^B_{ij}(f(\bar{x}))(y^i - f^i(\bar{x}), y^j - f^j(\bar{x})) \right)$$

e

$$\begin{aligned}
\left(t^2_{f(\bar{x})}(g) \circ t^2_{\bar{x}}(f)\right) : (x) \quad \longmapsto \quad & g(f(\bar{x})) + D(g)(f(\bar{x})) \left(D(f)(\bar{x})(x-\bar{x}) + \tfrac{1}{2} D^2(f)(\bar{x})(x-\bar{x})^2\right) \\
& + \tfrac{1}{2} D^2(g)(f(\bar{x})) \left(D(f)(\bar{x})(x-\bar{x}) + \tfrac{1}{2} D^2(f)(\bar{x})(x-\bar{x})^2\right)^2 \\
= \quad & g(f(\bar{x})) + D(g)(f(\bar{x}))(D(f)(\bar{x})(x-\bar{x})) \\
& + \tfrac{1}{2} D(g)(f(\bar{x}))(D^2(f)(\bar{x})(x-\bar{x}, x-\bar{x})) \\
& + \tfrac{1}{2} D^2(g)(f(\bar{x})) \left(D(f)(\bar{x})(x-\bar{x}), D(f)(\bar{x})(x-\bar{x})\right) + O^3(x-\bar{x})
\end{aligned}$$

e, quindi,

$$\begin{aligned}
t^2_{\bar{x}}\left(t^2_{f(\bar{x})}(g) \circ t^2_{\bar{x}}(f)\right)(x) \; = \; & g(f(\bar{x})) + [D(g)(f(\bar{x})) \circ D(f)(\bar{x})](x-\bar{x}) \\
& + \tfrac{1}{2} \Big[D(g)(f(\bar{x})) \circ D^2(f)(\bar{x}) \\
& \qquad + D^2(g)(f(\bar{x})) \circ (D(f)(\bar{x}) \times D(f)(\bar{x})) \Big] (x-\bar{x}, x-\bar{x})
\end{aligned}$$

o, in componenti, la composizione

$$t^2_{f(\bar{x})}(g) \bullet t^2_{\bar{x}}(f) = t^2_{\bar{x}}\left(t^2_{f(\bar{x})}(g) \circ t^2_{\bar{x}}(f)\right) = t^2_{\bar{x}}(g \circ f)$$

è definita da

$$(x^\alpha) \quad \longmapsto \quad \bar g^B + \left(\bar g^B_i \bar f^i_\alpha\right)(x^\alpha - \bar x^\alpha) + \tfrac{1}{2}\left(\bar g^B_i \bar f^i_{\alpha\beta} + \bar g^B_{ij} \bar f^i_\alpha \bar f^j_\beta\right)(x^\alpha - \bar x^\alpha, x^\beta - \bar x^\beta)$$

dove $\bar g^B = g^B(f(\bar x))$, $\bar g^B_i = g^B_i(f(\bar x))$, $\bar g^B_{ij} = g^B_{ij}(f(\bar x))$, $\bar f^i_\alpha = f^i_\alpha(\bar x)$ e $\bar f^i_{\alpha\beta} = f^i_{\alpha\beta}(\bar x)$.

Esempio 1.3. [Composizione di getti del terz'ordine]

Quando $k = 3$,

$$t^3_{f(\bar x)}(g) \bullet t^3_{\bar x}(f) = t^3_{\bar x}\left(t^3_{f(\bar x)}(g) \circ t^3_{\bar x}(f)\right) = t^3_{\bar x}\,(g \circ f)$$

è definita da

$$\begin{aligned}(x^\alpha) \quad \longmapsto \quad & \bar g^B + \left[\bar g^B_i \bar f^i_\alpha\right](x^\alpha - \bar x^\alpha) + \tfrac{1}{2}\left[\bar g^B_i \bar f^i_{\alpha\beta} + \bar g^B_{ij} \bar f^i_\alpha \bar f^j_\beta\right](x^\alpha - \bar x^\alpha, x^\beta - \bar x^\beta) \\ & + \tfrac{1}{6}\left[\bar g^B_i \bar f^i_{\alpha\beta\gamma} + 3\,\bar g^B_{rs} \bar f^r_{(\alpha} \bar f^s_{\beta\gamma)} + \bar g^B_{ijr} \bar f^r_\gamma \bar f^i_\alpha \bar f^j_\beta\right](x^\alpha - \bar x^\alpha, x^\beta - \bar x^\beta, x^\gamma - \bar x^\gamma)\end{aligned}$$

dove $\bar g^B_{ijr} = g^B_{ijr}(f(\bar x))$ e $\bar f^i_{\alpha\beta\gamma} = f^i_{\alpha\beta\gamma}(\bar x)$.

All'interno della varietà $J^k_x(\mathbb{R}^m;\mathbb{R}^n)_y$ c'è il sottoinsieme aperto denso $P^k_x(\mathbb{R}^m;\mathbb{R}^n)_y$ dei getti $j^k_x(f)$ delle funzioni $f \in \boldsymbol{\mathcal{F}}_x(\mathbb{R}^m;\mathbb{R}^n)_y$ tali che la mappa tangente $T_x(f) : T_x(\mathbb{R}^m) \longrightarrow T_y(\mathbb{R}^n)$ abbia rango massimo $\mathrm{rg}_x(f) = \min(m,n)$.

Rispetto all'operazione $\bullet$ le varietà $P^k_x(\mathbb{R}^m;\mathbb{R}^m)_x$ sono dei gruppi di Lie con elemento identità $\mathtt{1} = j^k_x(\mathrm{id}_{\mathbb{R}^m})$ ed inverso[1] $\left(j^k_x(f)\right)^{-1} = j^k_x\left(f^{-1}\right)$. Ogni gruppo di Lie $P^k_x(\mathbb{R}^m;\mathbb{R}^m)_x$ è isomorfo come gruppo di Lie al gruppo di Lie $G^k_m := P^k_0(\mathbb{R}^m;\mathbb{R}^m)_0$.

Per ogni $h,k \in \mathbb{N}$ tali che $1 \le h \le k$ le proiezioni $\pi^k_h : G^k_m \longrightarrow G^h_m$ sono epimorfismi di gruppi di Lie. Il gruppo $G^1_m \equiv GL(m;\mathbb{R})$ può essere immerso (come sottogruppo di Lie) in ogni gruppo di Lie G^k_m con $k > 1$ perché la composizione di due polinomi di primo grado è ancora un polinomio di primo grado. Se $1 < h < k$ il gruppo di Lie G^h_m non può essere immerso nel gruppo di Lie G^k_m con un monomorfimo perché la composizione di due polinomi di grado h è un polinomio di grado h^2. Il nucleo $N^k_m = \mathrm{Ker}(\pi^k_1)$ è un sottogruppo normale del gruppo G^k_m e, com'è ovvio, il gruppo quoziente G^k_m/N^k_m è isomorfo al gruppo G^1_m.

Esempio 1.4. [Gruppo G^1_m]
Le coordinate di un punto $p \in J^1_0(\mathbb{R}^m;\mathbb{R}^m)_0$ sono (p^ι_α) e la condizione che ci dice che $p \in G^1_m$ è $\det(p^\iota_\alpha) \neq 0$.

L'operazione di prodotto in è

$$(p^\iota_\alpha) \bullet \left(q^\sigma_\beta\right) = \left(z^\lambda_\mu\right)$$

[1] Se $f \in \boldsymbol{\mathcal{F}}_x(\mathbb{R}^m;\mathbb{R}^m)_x$ è una funzione tale che $\mathrm{rg}_x(f) = m$, possiamo dire che $f^{-1} \in \boldsymbol{\mathcal{F}}_x(\mathbb{R}^m;\mathbb{R}^m)_x$ perché il teorema della funzione inversa ci assicura che esiste un intorno aperto U del punto x tale che $f_{|U}$ sia un diffeomorfismo.

dove

$$z^\lambda_\mu = p^\lambda_\alpha q^\alpha_\mu$$

L'identità è $\imath = (\delta^\iota_\alpha)$ e l'inverso di un elemento p è $p^{-1} = (\bar{p}^\iota_\alpha)$ dove la matrice $(\bar{p}^\alpha_\mu)$ è la matrice inversa della matrice (p^λ_α) e, quindi,

$$\delta^\lambda_\mu \;=\; p^\lambda_\alpha\, \bar{p}^\alpha_\mu$$

Esempio 1.5. [Gruppo G^2_m]

Le "coordinate simmetriche" di un punto $p \in J^2_0(\mathbb{R}^m; \mathbb{R}^m)_0$ sono $\left(p^\iota_\alpha, p^\iota_{\alpha_1\alpha_2}\right)$ e la condizione che ci dice che $p \in G^2_m$ è $\det(p^\iota_\alpha) \neq 0$.

L'operazione di prodotto in è

$$\left(p^\iota_\alpha, p^\iota_{\alpha_1\alpha_2}\right) \bullet \left(q^\sigma_\beta, q^\sigma_{\beta_1\beta_2}\right) = \left(z^\lambda_\mu, z^\lambda_{\mu_1\mu_2}\right)$$

dove

$$\begin{aligned} z^\lambda_\mu &= p^\lambda_\alpha q^\alpha_\mu \\ z^\lambda_{\mu_1\mu_2} &= p^\lambda_{\alpha_1\alpha_2} q^{\alpha_1}_{\mu_1} q^{\alpha_2}_{\mu_2} + p^\lambda_\alpha q^\alpha_{\mu_1\mu_2} \end{aligned}$$

L'identità è $\imath = (\delta^\iota_\alpha, 0)$ e l'inverso di un elemento p è $p^{-1} = \left(\bar{p}^\iota_\alpha, \bar{p}^\iota_{\alpha_1\alpha_2}\right)$ dove la matrice $(\bar{p}^\alpha_\mu)$ è la matrice inversa della matrice (p^λ_α) e

$$\delta^\lambda_\mu \;=\; p^\lambda_\alpha\, \bar{p}^\alpha_\mu$$

$$0 \;=\; p^\lambda_\alpha\,\bar{p}^\alpha_{\mu_1\mu_2} + p^\lambda_{\alpha_1\alpha_2}\,\bar{p}^{\alpha_1}_{\mu_1}\,\bar{p}^{\alpha_2}_{\mu_2}$$

Quindi,

$$\begin{aligned} \delta^\lambda_\mu &= p^\lambda_\alpha\,\bar{p}^\alpha_\mu \\ \bar{p}^\sigma_{\mu_1\mu_2} &= -\,\bar{p}^\sigma_\lambda\,p^\lambda_{\alpha_1\alpha_2}\bar{p}^{\alpha_1}_{\mu_1}\bar{p}^{\alpha_2}_{\mu_2} \end{aligned}$$

Il sottogruppo N^2_m è composto dagli elementi che hanno "coordinate" $\left(\delta^\iota_\alpha, p^\iota_{\alpha_1\alpha_2}\right)$ e si ha

$$\left(\delta^\iota_\alpha, p^\iota_{\alpha_1\alpha_2}\right) \bullet \left(\delta^\sigma_\beta, q^\sigma_{\beta_1\beta_2}\right) = \left(\delta^\lambda_\mu, p^\lambda_{\mu_1\mu_2} +\, q^\lambda_{\mu_1\mu_2}\right)$$

Quindi N^2_m è un gruppo di Lie abeliano isomorfo al gruppo abeliano sottostante allo spazio vettoriale $S^1_2(\mathbb{R}^m)$.

Esempio 1.6. [Gruppo G^3_m]

Le "coordinate simmetriche" di un punto $p \in J^3_0(\mathbb{R}^m;\mathbb{R}^m)_0$ sono

$$\left(p^\iota_\alpha, p^\iota_{\alpha_1\alpha_2}, p^\iota_{\alpha_1\alpha_2\alpha_3}\right)$$

e la condizione che ci dice che $p \in G^3_m$ è $\det(p^\iota_\alpha) \neq 0$.

L'operazione di prodotto in è

$$\left(p^\iota_\alpha, p^\iota_{\alpha_1\alpha_2}, p^\iota_{\alpha_1\alpha_2\alpha_3}\right) \bullet \left(q^\sigma_\beta, q^\sigma_{\beta_1\beta_2}, q^\sigma_{\beta_1\beta_2\beta_3}\right) = \left(z^\lambda_\mu, z^\lambda_{\mu_1\mu_2}, z^\lambda_{\mu_1\mu_2\mu_3}\right)$$

dove

$$\begin{aligned} z^\lambda_\mu &= p^\lambda_\alpha q^\alpha_\mu \\ z^\lambda_{\mu_1\mu_2} &= p^\lambda_{\alpha_1\alpha_2} q^{\alpha_1}_{\mu_1} q^{\alpha_2}_{\mu_2} + p^\lambda_\alpha q^\alpha_{\mu_1\mu_2} \\ z^\lambda_{\mu_1\mu_2\mu_3} &= p^\lambda_\alpha q^\alpha_{\mu_1\mu_2\mu_3} + 3\, p^\lambda_{\alpha_1\alpha_2} q^{\alpha_1}_{(\mu_1} q^{\alpha_2}_{\mu_2\mu_3)} + p^\lambda_{\alpha_1\alpha_2\alpha_3} q^{\alpha_1}_{\mu_1} q^{\alpha_2}_{\mu_2} q^{\alpha_3}_{\mu_3} \end{aligned}$$

L'identità è $\imath = (\delta^\iota_\alpha, 0, 0)$ e l'inverso di un elemento p è $p^{-1} = \left(\bar p^\iota_\alpha, \bar p^\iota_{\alpha_1\alpha_2}, \bar p^\iota_{\alpha_1\alpha_2\alpha_3}\right)$ dove la matrice $(\bar p^\alpha_\mu)$ è la matrice inversa della matrice (p^λ_α) e

$$\begin{aligned} \delta^\lambda_\mu &= p^\lambda_\alpha\, \bar p^\alpha_\mu \\ 0 &= p^\lambda_\alpha\, \bar p^\alpha_{\mu_1\mu_2} + p^\lambda_{\alpha_1\alpha_2}\, \bar p^{\alpha_1}_{\mu_1}\, \bar p^{\alpha_2}_{\mu_2} \\ 0 &= p^\lambda_\alpha \bar p^\alpha_{\mu_1\mu_2\mu_3} + 3\, p^\lambda_{\alpha_1\alpha_2} \bar p^{\alpha_1}_{(\mu_1} \bar p^{\alpha_2}_{\mu_2\mu_3)} + p^\lambda_{\alpha_1\alpha_2\alpha_3} \bar p^{\alpha_1}_{\mu_1} \bar p^{\alpha_2}_{\mu_2} \bar p^{\alpha_3}_{\mu_3} \end{aligned}$$

Quindi,

$$\begin{aligned} \delta^\lambda_\mu &= p^\lambda_\alpha\, \bar p^\alpha_\mu \\ \bar p^\sigma_{\mu_1\mu_2} &= -\,\bar p^\sigma_\lambda\, p^\lambda_{\alpha_1\alpha_2} \bar p^{\alpha_1}_{\mu_1} \bar p^{\alpha_2}_{\mu_2} \\ \bar p^\sigma_{\mu_1\mu_2\mu_3} &= -\,\bar p^\sigma_\lambda\, p^\lambda_{\alpha_1\alpha_2\alpha_3}\, \bar p^{\alpha_1}_{\mu_1}\, \bar p^{\alpha_2}_{\mu_2}\, \bar p^{\alpha_3}_{\mu_3} - 3\, \bar p^\sigma_\lambda\, p^\lambda_{\alpha_1\alpha_2}\, \bar p^{\alpha_1}_{(\mu_1}\, \bar p^{\alpha_2}_{\mu_2\mu_3)} \end{aligned}$$

Il sottogruppo N^3_m è composto dagli elementi che hanno "coordinate" $\left(\delta^\iota_\alpha, p^\iota_{\alpha_1\alpha_2}, p^\iota_{\alpha_1\alpha_2\alpha_3}\right)$ e si ha

$$\left(\delta^\iota_\alpha, p^\iota_{\alpha_1\alpha_2}, p^\iota_{\alpha_1\alpha_2\alpha_3}\right) \bullet \left(\delta^\sigma_\beta, q^\sigma_{\beta_1\beta_2}, q^\sigma_{\beta_1\beta_2\beta_3}\right) = \left(\delta^\lambda_\mu, p^\lambda_{\mu_1\mu_2} + q^\lambda_{\mu_1\mu_2}, q^\lambda_{\mu_1\mu_2\mu_3} + 3\, p^\lambda_{\alpha(\mu_1} q^\alpha_{\mu_2\mu_3)} + p^\lambda_{\mu_1\mu_2\mu_3}\right)$$

Quindi N^3_m è un gruppo di Lie non abeliano che come varietà è diffeomorfo allo spazio vettoriale $S^1_2(\mathbb{R}^m) \times S^1_3(\mathbb{R}^m)$.

Il nucleo della proiezione $\pi^3_2 : N^3_m \longrightarrow N^2_m$ è l'insieme degli elementi con coordinate $\big(\delta^\iota_\alpha, 0, p^\iota_{\alpha_1\alpha_2\alpha_3}\big)$ ed è un gruppo di Lie abeliano isomorfo al gruppo abeliano sottostante allo spazio vettoriale $S^1_3(\mathbb{R}^m)$.

Osservazione 1.4. [Coordinate fibrate simmetriche sui gruppi G^k_m]
Le "coordinate simmetriche" di un punto $p \in J^k_0(\mathbb{R}^m; \mathbb{R}^m)_0$ sono

$$\big(p^\iota_\alpha, p^\iota_{\alpha_1\alpha_2}, \dots, p^\iota_{\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_k}\big)$$

e la condizione che ci dice che $p \in G^k_m$ è $\det(p^\iota_\alpha) \neq 0$.

L'operazione di prodotto in è

$$\big(p^\iota_\alpha, p^\iota_{\alpha_1\alpha_2}, \dots, p^\iota_{\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_k}\big) \bullet \big(q^\sigma_\beta, q^\sigma_{\beta_1\beta_2}, \dots, q^\sigma_{\beta_1\beta_2\dots\beta_k}\big) = \big(z^\lambda_\mu, z^\lambda_{\mu_1\mu_2}, \dots, z^\lambda_{\mu_1\mu_2\dots\mu_k}\big)$$

dove

$$\begin{aligned}
z^\lambda_\mu &= p^\lambda_\alpha q^\alpha_\mu \\
z^\lambda_{\mu_1\mu_2} &= p^\lambda_{\alpha_1\alpha_2} q^{\alpha_1}_{\mu_1} q^{\alpha_2}_{\mu_2} + p^\lambda_\alpha q^\alpha_{\mu_1\mu_2} \\
z^\lambda_{\mu_1\mu_2\mu_3} &= p^\lambda_\alpha q^\alpha_{\mu_1\mu_2\mu_3} + 3\, p^\lambda_{\alpha_1\alpha_2} q^{\alpha_1}_{(\mu_1} q^{\alpha_2}_{\mu_2\mu_3)} + p^\lambda_{\alpha_1\alpha_2\alpha_3} q^{\alpha_1}_{\mu_1} q^{\alpha_2}_{\mu_2} q^{\alpha_3}_{\mu_3} \\
&\vdots
\end{aligned}$$

$$z^\lambda_{\mu_1\mu_2\dots\mu_k} = p^\lambda_\alpha q^\alpha_{\mu_1\mu_2\dots\mu_k} + \dots + p^\lambda_{\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_k} q^{\alpha_1}_{\mu_1} q^{\alpha_2}_{\mu_2} \cdots q^{\alpha_k}_{\mu_k}$$

L'identità è $\imath = (\delta^\iota_\alpha, 0, \dots, 0)$ e l'inverso di un elemento p è $p^{-1} = \left(\bar{p}^\iota_\alpha, \bar{p}^\iota_{\alpha_1\alpha_2}, \dots, \bar{p}^\iota_{\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_k}\right)$ dove la matrice $(\bar{p}^\alpha_\mu)$ è la matrice inversa della matrice (p^λ_α) e

$$\begin{aligned}
\delta^\lambda_\mu &= p^\lambda_\alpha\, \bar{p}^\alpha_\mu \\
0 &= p^\lambda_\alpha\, \bar{p}^\alpha_{\mu_1\mu_2} + p^\lambda_{\alpha_1\alpha_2}\, \bar{p}^{\alpha_1}_{\mu_1}\, \bar{p}^{\alpha_2}_{\mu_2} \\
0 &= p^\lambda_\alpha \bar{p}^\alpha_{\mu_1\mu_2\mu_3} + 3\, p^\lambda_{\alpha_1\alpha_2} \bar{p}^{\alpha_1}_{(\mu_1} \bar{p}^{\alpha_2}_{\mu_2\mu_3)} + p^\lambda_{\alpha_1\alpha_2\alpha_3} \bar{p}^{\alpha_1}_{\mu_1} \bar{p}^{\alpha_2}_{\mu_2} \bar{p}^{\alpha_3}_{\mu_3} \\
&\ \vdots \\
0 &= p^\lambda_\alpha \bar{p}^\alpha_{\mu_1\mu_2\cdots\mu_k} + \dots + p^\lambda_{\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_k} \bar{p}^{\alpha_1}_{\mu_1} \bar{p}^{\alpha_2}_{\mu_2} \cdots \bar{p}^{\alpha_k}_{\mu_k}
\end{aligned}$$

Quindi,

$$\begin{aligned}
\delta^\lambda_\mu &= p^\lambda_\alpha\, \bar{p}^\alpha_\mu \\
\bar{p}^\sigma_{\mu_1\mu_2} &= -\,\bar{p}^\sigma_\lambda\, p^\lambda_{\alpha_1\alpha_2} \bar{p}^{\alpha_1}_{\mu_1} \bar{p}^{\alpha_2}_{\mu_2} \\
\bar{p}^\sigma_{\mu_1\mu_2\mu_3} &= -\,\bar{p}^\sigma_\lambda\, p^\lambda_{\alpha_1\alpha_2\alpha_3}\, \bar{p}^{\alpha_1}_{\mu_1}\, \bar{p}^{\alpha_2}_{\mu_2}\, \bar{p}^{\alpha_3}_{\mu_3} - 3\, \bar{p}^\sigma_\lambda\, p^\lambda_{\alpha_1\alpha_2}\, \bar{p}^{\alpha_1}_{(\mu_1}\, \bar{p}^{\alpha_2}_{\mu_2\mu_3)} \\
&\ \vdots \\
\bar{p}^\sigma_{\mu_1\mu_2\dots\mu_k} &= -\,\bar{p}^\sigma_\lambda\, p^\lambda_{\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_k}\, \bar{p}^{\alpha_1}_{\mu_1}\, \bar{p}^{\alpha_2}_{\mu_2} \cdots \bar{p}^{\alpha_k}_{\mu_k} - \dots
\end{aligned}$$

Il sottogruppo N^k_m è composto dagli elementi che hanno "coordinate" $\left(\delta^\iota_\alpha, p^\iota_{\alpha_1\alpha_2}, \dots, p^\iota_{\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_k}\right)$ e si ha

$$\left(\delta^\iota_\alpha, p^\iota_{\alpha_1\alpha_2}, \dots, p^\iota_{\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_k}\right) \bullet \left(\delta^\sigma_\beta, q^\sigma_{\beta_1\beta_2}, \dots, q^\sigma_{\beta_1\beta_2\dots\beta_k}\right) = \left(\delta^\lambda_\mu, p^\lambda_{\mu_1\mu_2} + q^\lambda_{\mu_1\mu_2}, \dots, q^\lambda_{\mu_1\mu_2\dots\mu_k} + p^\lambda_{\mu_1\mu_2\dots\mu_k} + \dots\right)$$

Quindi N_m^k è un gruppo di Lie non abeliano che come varietà è diffeomorfo allo spazio vettoriale $S_2^1(\mathbb{R}^m) \times S_3^1(\mathbb{R}^m) \times \ldots \times S_k^1(\mathbb{R}^m)$.

Il nucleo della proiezione $\pi_{k-1}^k : N_m^k \longrightarrow N_m^{k-1}$ è l'insieme degli elementi che hanno coordinate $\left(\delta_\alpha^\iota, 0, \ldots, 0, p_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_k}^\iota\right)$ ed è un gruppo di Lie abeliano isomorfo al gruppo di Lie abeliano sottostante allo spazio vettoriale $S_k^1(\mathbb{R}^m)$.

2 Getti di ordine k di funzioni fra varietà

Date due varietà differenziabili M ed N, per ogni punto $x \in M$ indichiamo con $\boldsymbol{\mathcal{F}}_x(M;N)$ l'insieme delle funzioni f dove $U = \mathrm{Dom}(f) \subseteq M$ è un intorno aperto del punto x ed $f \in \mathcal{C}^\infty(U;N)$. Per ogni $y \in N$ indicheremo con $\boldsymbol{\mathcal{F}}_x(M;N)_y$ il sottoinsieme delle funzioni $f \in \boldsymbol{\mathcal{F}}_x(M;N)$ tali che $f(x) = y$.

Diciamo che due funzioni $f_1, f_2 \in \boldsymbol{\mathcal{F}}_x(M;N)_y$, *sono equivalenti all'ordine k (nel punto x)* se esistono un sistema di coordinate (U, φ) attorno al punto $x \in M$ ed un sistema di coordinate (V, ψ) attorno al punto $y \in N$ tali che le due funzioni

$$\psi \circ f_1 \circ \varphi^{-1}, \psi \circ f_2 \circ \varphi^{-1} \in \boldsymbol{\mathcal{F}}_{\varphi(x)}(\mathbb{R}^m; \mathbb{R}^n)_{\psi(y)}$$

siano equivalenti all'ordine k nel punto $\varphi(x)$. Equivalentemente, possiamo dire che

$$j_{\varphi(x)}^k(\psi \circ f_1 \circ \varphi^{-1}) = j_{\varphi(x)}^k(\psi \circ f_2 \circ \varphi^{-1}) \in J_{\varphi(x)}^k(\mathbb{R}^m; \mathbb{R}^n)_{\psi(y)}$$

La relazione non dipende dai sistemi di coordinate utilizzati perché

$$\psi_2 \circ f \circ \varphi_2^{-1} = \psi_{21} \circ (\psi_1 \circ f \circ \varphi_1^{-1}) \circ \varphi_{12}$$

e, quindi,

$$\begin{aligned} j^k_{\varphi_2(x)}(\psi_2 \circ f \circ \varphi_2^{-1}) &= j^k_{\varphi_2(x)}(\psi_{21} \circ (\psi_1 \circ f \circ \varphi_1^{-1}) \circ \varphi_{12}) \\ &= j^k_{\psi_1(y)}(\psi_{21}) \bullet j^k_{\varphi_1(x)}(\psi_1 \circ f \circ \varphi_1^{-1}) \bullet j^k_{\varphi_2(x)}(\varphi_{12}) \end{aligned} \tag{1}$$

con $j^k_{\varphi_2(x)}(\varphi_{12})$ e $j^k_{\psi_1(y)}(\psi_{21})$ che sono getti invertibili. Dalla (12) si deduce che

$$j^k_{\varphi_2(x)}(\psi_2 \circ f \circ \varphi_2^{-1}) = j^k_{\varphi_2(x)}(\psi_2 \circ g \circ \varphi_2^{-1}) \Leftrightarrow j^k_{\varphi_1(x)}(\psi_1 \circ f \circ \varphi_1^{-1}) = j^k_{\varphi_1(x)}(\psi_1 \circ g \circ \varphi_1^{-1})$$

La relazione $\sim_k$ così definita nell'insieme $\boldsymbol{\mathcal{F}}_x(M;N)_y$ è una relazione di equivalenza. La classe di equivalenza $[f]_{\sim_k}$ verrà indicata con $j^k_x(f)$ e verrà detta *getto di ordine k della funzione f nel punto x*; il punto x è detto *sorgente* del getto $j^k_x(f)$ mentre il punto $y = f(x)$ viene detto *immagine* del getto. L'insieme quoziente $\boldsymbol{\mathcal{F}}_x(M;N)_y/\sim_k$ verrà indicato con $J^k_x(M;N)_y$ ed ha una struttura naturale di varietà differenziabile, diffeomorfa alla varietà

$$J^k_{\varphi(x)}(\mathbb{R}^m;\mathbb{R}^n)_{\psi(y)} = \{\varphi(x)\} \times \{\psi(y)\} \times S^0_1(\mathbb{R}^m;\mathbb{R}^n) \times \cdots \times S^0_k(\mathbb{R}^m;\mathbb{R}^n)$$

attraverso al biiezione

$$\begin{aligned} (\Psi\bar{\Phi})^k_{x,y} \ : \ J^k_x(U;V)_y &\longrightarrow J^k_{\varphi(x)}(U;V)_{\psi(y)} \subseteq J^k_{\varphi(x)}(\mathbb{R}^m;\mathbb{R}^n)_{\psi(y)} \\ j^k_x(f) &\longmapsto j^k_{\varphi(x)}(\psi \circ f \circ \varphi^{-1}) \end{aligned}$$

da cui si deduce che

$$\dim\left(J^k_x(M;N)_y\right) = n \cdot \left(\binom{m+k}{k} - 1\right)$$

In analogia con quanto già visto per le varietà $\mathbb{R}^m$ ed $\mathbb{R}^n$, possiamo definire gli insiemi

$$\begin{aligned} J^k_x(M;N) &= \bigcup_{y\in N} J^k_x(M;N)_y \\ J^k(M;N)_y &= \bigcup_{x\in M} J^k_x(M;N)_y \\ J^k(M;N) &= \bigcup_{x\in M} J^k_x(M;N) = \bigcup_{y\in N} J^k(M;N)_y \\ &= \bigcup_{(x,y)\in M\times N} J^k_x(M;N)_y \end{aligned}$$

e per ogni funzione $f \in \mathcal{C}^\infty(M;N)$ possiamo definire il prolungamento $j^k(f) : M \longrightarrow J^k(M;N)$ della funzione f con la solita formula $j^k(f) : x \longmapsto j^k_x(f)$.

All'interno della varietà $M \times M$ c'è la diagonale Δ, grafico della funzione id_M, che è una sottovarietà diffeomorfa ad M. All'interno di $J^k(M;M)$ c'è l'immagine della funzione $j^k\left(\mathrm{id}_M\right) : x \longmapsto j^k_x\left(\mathrm{id}_M\right)$, che è una sottovarietà Δ^k diffeomorfa alla diagonale Δ e ad M.

Osservazione 2.1. [Struttura di varietà e di fibrato su $J^k_x(M;N)$]
Osservando che $J^k_{\varphi(x)}(\varphi(U);\psi(V))$ è un sottoinsieme aperto di $J^k_{\varphi(x)}(\mathbb{R}^m;\mathbb{R}^n)$, possiamo affermare che gli insiemi $J^k_x(M;N)$ hanno una struttura naturale di varietà differenziabile, localmente diffeomorfa a

varietà del tipo

$$J^k_{\varphi(x)}(\varphi(U);\psi(V)) = \{\varphi(x)\} \times \psi(V) \times S^0_1(\mathbb{R}^m;\mathbb{R}^n) \times \cdots \times S^0_k(\mathbb{R}^m;\mathbb{R}^n)\,.$$

attraverso le biiezioni

$$\begin{array}{rcccl} (\Psi\bar{\Phi})^k_x & : & J^k_x(U;V) & \longrightarrow & J^k_{\varphi(x)}(\varphi(U);\psi(V)) \\ & & j^k_x(f) & \longmapsto & j^k_{\varphi(x)}(\psi\circ f\circ\varphi^{-1}) \end{array}$$

La funzione $\beta : J^k_x(M;N) \longrightarrow N$ definita da $\beta(j^k_x(f)) = f(x)$ è suriettiva, di classe $\mathcal{C}^\infty$ e la sua mappa tangente è suriettiva. La proiezione β definisce una struttura di fibrato differenziale, con fibra tipo $J^k_0(\mathbb{R}^m;\mathbb{R}^n)_0$, le cui fibre sono le varietà $\beta^{-1}(y) = J^k_x(M;N)_y$. La varietà $J^k_0(\mathbb{R}^m;N)$ verrà indicata con $T^k_m(N)$.

Osservazione 2.2. [Struttura di varietà e di fibrato su $J^k(M;N)_y$]
Osservando che $J^k(\varphi(U);\psi(V))_{\psi(y)}$ è un sottoinsieme aperto di $J^k(\mathbb{R}^m;\mathbb{R}^n)_{\psi(y)}$, possiamo affermare che gli insiemi $J^k(M;N)_y$ hanno una struttura naturale di varietà differenziabile, localmente diffeomorfa a varietà del tipo

$$J^k(\varphi(U);\psi(V))_{\psi(y)} = \varphi(U) \times \{\psi(y)\} \times S^0_1(\mathbb{R}^m;\mathbb{R}^n) \times \cdots \times S^0_k(\mathbb{R}^m;\mathbb{R}^n)\,.$$

attraverso le biiezioni

$$\begin{array}{rcccl} (\Psi\bar{\Phi})^k_y & : & J^k(U;V)_y & \longrightarrow & J^k(\varphi(U);\psi(V))_{\psi(y)} \\ & & j^k_x(f) & \longmapsto & j^k_{\varphi(x)}(\psi\circ f\circ\varphi^{-1}) \end{array}$$

La funzione $\alpha : J^k(M;N)_y \longrightarrow M$ definita da $\alpha(j^k_x(f)) = x$ è suriettiva, di classe $\mathcal{C}^\infty$ e la sua mappa tangente è suriettiva. La proiezione α definisce una struttura di fibrato differenziale, con fibra tipo $J^k_0(\mathbb{R}^m;\mathbb{R}^n)_0$, le cui fibre sono le varietà $\alpha^{-1}(x) = J^k_x(M;N)_y$.

Osservazione 2.3. [Struttura di varietà e di fibrato su $J^k(M;N)$]
Osservando che $J^k(\varphi(U);\psi(V))$ è un sottoinsieme aperto di $J^k(\mathbb{R}^m;\mathbb{R}^n)$, possiamo affermare che gli insiemi $J^k(M;N)$ hanno una struttura naturale di varietà differenziabile, localmente diffeomorfa a varietà del tipo

$$J^k(\varphi(U);\psi(V)) = \varphi(U) \times \psi(V) \times S^0_1(\mathbb{R}^m;\mathbb{R}^n) \times \cdots \times S^0_k(\mathbb{R}^m;\mathbb{R}^n)\,.$$

attraverso le biiezioni

$$\begin{array}{rcccc} (\Psi\bar{\Phi})^k & : & J^k(U;V) & \longrightarrow & J^k(\varphi(U);\psi(V)) \\ & & j^k_x(f) & \longmapsto & j^k_{\varphi(x)}(\psi \circ f \circ \varphi^{-1}) \end{array}$$

Le due funzioni $\alpha : J^k(M;N) \longrightarrow M$ e $\beta : J^k(M;N) \longrightarrow N$ definiscono due strutture di varietà fibrate le cui fibre sono $\alpha^{-1}(x) = J^k_x(M;N)$ e $\beta^{-1}(y) = J^k(M;N)_y$.

La funzione prodotto diagonale $(\alpha,\beta) : J^k(M;N) \longrightarrow M \times N$ definita da $(\alpha,\beta)(j^k_x(f)) = (x, f(x))$ è suriettiva, di classe $\mathcal{C}^\infty$ e la sua mappa tangente è suriettiva. La proiezione (α,β) definisce una struttura di fibrato differenziale, con fibra tipo $J^k_0(\mathbb{R}^m;\mathbb{R}^n)_0$, le cui fibre sono le varietà $(\alpha,\beta)^{-1}(x,y) = J^k_x(M;N)_y$.

Date tre varietà M, X, Y ed una funzione $F \in \mathcal{C}^\infty(Y;X)$ possiamo definire una funzione $J^k(M;F)$ di classe $\mathcal{C}^\infty$ richiedendo che

$$\begin{array}{rcccl} J^k(M;F) & : & J^k(M;Y) & \longrightarrow & J^k(M;X) \\ & & j^k_x(f) & \longmapsto & j^k_x(F\circ f) = j^k_{f(x)}(F)\bullet j^k_x(f) \end{array}$$

Per ogni coppia di funzioni F e G tali che si possa definire la composizione $G \circ F$, si ha

$$J^k(M;G\circ F) = J^k(M;G)\circ J^k(M;F)$$

Quando F è un diffeomorfismo anche $J^k(M;F)$ è un diffeomorfismo e si ha

$$(J^k(M;F))^{-1} = J^k(M;F^{-1})$$

Quando $F : Y \longrightarrow X$ è una proiezione da varietà fibrata, suriettiva con mappa tangente suriettiva, anche

$$J^k(M;F) : J^k(M;Y) \longrightarrow J^k(M;X)$$

è una proiezione da varietà fibrata.

3 Prolungamenti di ordine k di varietà fibrate

Data una varietà fibrata $\zeta : Z \longrightarrow M$ la controimmagine $(J^k(M;\zeta))^{-1}(\Delta^k)$, della diagonale $\Delta^k \subset J^k(M;M)$, ha una struttura naturale di varietà fibrata su Δ^k e, quindi, su M. Se non ci sono possibilità di equivoci, la varietà $(J^k(M;\zeta))^{-1}(\Delta^k)$ verrà indicata con $J^k(Z)$ oppure, quando è necessario mettere in evidenza la proiezione ζ, verrà indicata con $J^k[\zeta]$. La varietà $J^k(Z)$ è una varietà fibrata su M con proiezione $\zeta^k : J^k(Z) \longrightarrow M$ che viene detta *prolungamento di ordine* k della varietà fibrata $\zeta : Z \longrightarrow M$.

Le proiezioni $\pi^k_h : J^k(M;Z) \longrightarrow J^h(M;Z)$ inducono proiezioni da fibrato $\zeta^k_h : J^k(Z) \longrightarrow J^h(Z)$ tali che $\zeta^h \circ \zeta^k_h = \zeta^k$. Per convezione definiamo $J^0(Z) = Z$ e $\zeta^0 = \zeta$.

Osservazione 3.1. [Diagonali Δ^k]

L'insieme $J^k_x(M;M)_x$ ha una struttura naturale di varietà differenziabile, diffeomorfa alla varietà

$$J^k_{\varphi(x)}(\mathbb{R}^m;\mathbb{R}^m)_{\psi(x)} = \{\varphi(x)\} \times \{\psi(x)\} \times S^0_1(\mathbb{R}^m;\mathbb{R}^m) \times \cdots \times S^0_k(\mathbb{R}^m;\mathbb{R}^m)$$

attraverso al biiezione

$$\begin{array}{rcccl} (\Psi\bar{\Phi})^k_{x,x} & : & J^k_x(U;V)_x & \longrightarrow & J^k_{\varphi(x)}(U;V)_{\psi(x)} \equiv J^k_{\varphi(x)}(\mathbb{R}^m;\mathbb{R}^m)_{\psi(x)} \\ & & j^k_x(f) & \longmapsto & j^k_{\varphi(x)}(\psi \circ f \circ \varphi^{-1}) \end{array}$$

Se invece di considerare due sistemi di coordinate distinti (U,φ) e (V,ψ) attorno al punto $x \in U \cap V$ scegliamo due volte lo stesso sistema di coordinate (U,φ), allora $J^k_x(M;M)_x$ è una varietà diffeomorfa alla varietà

$$J^k_{\varphi(x)}(\mathbb{R}^m;\mathbb{R}^m)_{\varphi(x)} = \{\varphi(x)\} \times \{\varphi(x)\} \times S^0_1(\mathbb{R}^m;\mathbb{R}^m) \times \cdots \times S^0_k(\mathbb{R}^m;\mathbb{R}^m)$$

attraverso al biiezione

$$\begin{array}{rcccl} (\Phi\bar{\Phi})^k_{x,x} & : & J^k_x(U;U)_x & \longrightarrow & J^k_{\varphi(x)}(U;U)_{\varphi(x)} = J^k_{\varphi(x)}(\mathbb{R}^m;\mathbb{R}^m)_{\varphi(x)} \equiv J^k_0(\mathbb{R}^m;\mathbb{R}^m)_0 \\ & & j^k_x(f) & \longmapsto & j^k_{\varphi(x)}(\varphi \circ f \circ \varphi^{-1}) \end{array}$$

In questo caso, il punto $j^k_x(\mathrm{id}_M)$ viene mandato sempre nel punto

$$\begin{aligned} (\Phi\bar{\Phi})^k_{x,x}\left(j^k_x(\mathrm{id}_M)\right) &= \left(\varphi(x), \varphi(x), D(\mathrm{id}_{\mathbb{R}^m})(\varphi(x)), D^2(\mathrm{id}_{\mathbb{R}^m})(\varphi(x)), \ldots, D^k(\mathrm{id}_{\mathbb{R}^m})(\varphi(x))\right) \\ &= (\varphi(x), \varphi(x), \mathrm{id}_{\mathbb{R}^m}, 0, \ldots, 0) \end{aligned}$$

L'insieme

$$Q^k(M) = \bigcup_{x \in M} J^k_x(M;M)_x$$

è una sottovarietà differenziabile di $J^k(M;M)$ che è anche un fibrato differenziale, con fibra tipo $J^k_0(\mathbb{R}^m;\mathbb{R}^m)_0$, su M. La dimensione di $Q^k(M)$ è $\dim(Q^k(M)) = m + \dim(J^k_0(\mathbb{R}^m;\mathbb{R}^m)_0) = m\binom{m+k}{k}$.

La "diagonale" Δ^k è l'immagine

$$\Delta^k = \bigcup_{x \in M} \left\{j^k_x(\mathrm{id}_M)\right\} = \mathrm{Im}\left(j^k(\mathrm{id}_M)\right) \subset Q^k(M) \subset J^k(M;M)$$

Siccome la funzione $j^k(\mathrm{id}_M)$ è una sezione di classe $\mathcal{C}^\infty$ di $Q^k(M)$, la diagonale Δ^k è una sottovarietà di $Q^k(M)$ che a sua volta è una sottovarietà di $J^k(M;M)$. La diagonale Δ^k è diffeomorfa a M e c'è una successione di proiezioni

$$\ldots \longrightarrow \Delta^k \longrightarrow \Delta^{k-1} \longrightarrow \ldots \longrightarrow \Delta^0 \equiv \Delta \longrightarrow M$$

che sono diffeomorfismi.

Esempio 3.1. [Prolungamenti di fibrati banali]
Date due varietà M ed N, indichiamo con Z la varietà prodotto $M \times N$ e con ζ la prima proiezione del prodotto cartesiano. I prolungamenti $\zeta^k : J^k(Z) \longrightarrow M$ del fibrato banale $\zeta : Z \longrightarrow M$ sono diffeomorfi, e isomorfi come fibrati su M, ai fibrati $J^k(M; N) \longrightarrow M$.

Alcuni preferiscono definire prima i fibrati $J^k(M; N) \longrightarrow M$ e poi definire i fibrati delle sezioni delle varietà fibrate. Altri preferiscono definire subito i fibrati sezioni delle varietà fibrate e definire poi $J^k(M; N)$ come il fibrato delle sezioni di un fibrato banale. Ovviamente i due approcci sono equivalenti.

Per ogni punto $p \in J^k(Z)$ esiste una sezione locale σ definita in un intorno aperto U del punto $x = \zeta^k(p)$ e tale che $p = j^k_x(\sigma)$. Se $\sigma : U \longrightarrow \zeta^{-1}(U)$ è una sezione locale (o globale) di Z allora $j^k_x(\sigma) \in (\zeta^k)^{-1}(U)$ e $j^k(\sigma)$ è una sezione locale (o globale) $j^k(\sigma) : U \longrightarrow (\zeta^k)^{-1}(U)$ di $J^k(Z)$. La sezione $j^k(\sigma)$ viene detta *prolungamento di ordine k della sezione σ*. Per ogni coppia (h, k) di numeri naturali tali che $0 \leq h < k$ si ha $\zeta^k_h \circ j^k(\sigma) = j^h(\sigma)$ (per convenzione $j^0(\sigma) = \sigma$).

Un sistema di coordinate fibrate (x^α, z^i) su Z induce sulla varietà fibrata $J^k(Z)$ un sistema di *coordinate fibrate naturali*[2] $(x^\alpha, z^i, z^i_\nu, z^i_{\nu_1\nu_2}, \ldots, z^i_{\nu_1\nu_2\ldots\nu_k})$ imponendo che per ogni sezione locale σ :

[2] Le "coordinate fibrate simmetriche" $(z^i_{\nu_1\nu_2}, \ldots, z^i_{\nu_1\nu_2\ldots\nu_k})$ non sono vere coordinate se non si restringono gli indici a successioni ordinate in senso non decrescente.

$(x^\alpha) \longmapsto (x^\alpha, \sigma^i(x^\beta))$ si abbia

$$
\begin{aligned}
\left(z^i \circ j^k(\sigma)\right)(x) &= \sigma^i(x) \\
\left(z^i_\nu \circ j^k(\sigma)\right)(x) &= \partial_\nu \sigma^i(x) \\
\left(z^i_{\nu_1\nu_2} \circ j^k(\sigma)\right)(x) &= \partial_{\nu_2}\partial_{\nu_1} \sigma^i(x) \\
&\vdots \\
\left(z^i_{\nu_1\dots\nu_r} \circ j^k(\sigma)\right)(x) &= \partial_{\nu_r}\cdots\partial_{\nu_1} \sigma^i(x) \\
&\vdots \\
\left(z^i_{\nu_1\dots\nu_k} \circ j^k(\sigma)\right)(x) &= \partial_{\nu_k}\cdots\partial_{\nu_1} \sigma^i(x)
\end{aligned}
$$

Le proiezioni

$$
\begin{aligned}
M \xleftarrow{\zeta_0} Z \xleftarrow{\zeta^1_0} J^1(Z) \xleftarrow{\zeta^2_1} J^2(Z) \xleftarrow{\zeta^3_2} \dots \\
\xleftarrow{\zeta^r_{r-1}} J^r(Z) \xleftarrow{\zeta^{r+1}_r} J^{r+1}(Z) \xleftarrow{\zeta^{r+2}_{r+1}} \dots
\end{aligned}
$$

consentono di definire il limite proiettivo[3]

$$
J^\infty(Z) = \underleftarrow{\lim}\, J^r(Z)
$$

[3]In questo caso, il limite proiettivo è definito come il sottoinsieme definito da

$$
\underleftarrow{\lim}\, J^r(Z) = \left\{ (a_r)_{r\in\mathbb{N}} \in \prod_{r\in\mathbb{N}} J^r(Z) \,\middle|\, a_r = \zeta^s_r(a_s) \quad \forall r \le s \right\}
$$

della successione delle varietà fibrate $J^r(Z)$. I sistemi di "coordinate fibrate naturali" sono delle successioni infinite

$$(x^\alpha, z^i, z^i_\nu, z^i_{\nu_1\nu_2}, \ldots, z^i_{\nu_1\nu_2\ldots\nu_k}, \ldots)$$

e possiamo definire anche i prolungamenti $j^\infty(\sigma)$ per le sezioni $\sigma : M \longrightarrow Z$. In coordinate fibrate naturali si ha

$$(x^\alpha) \longmapsto (x^\alpha, \sigma^i(x), \partial_\nu\sigma^i(x), \partial_{\nu_2}\partial_{\nu_1}\sigma^i(x), \ldots, \partial_{\nu_k}\cdots\partial_{\nu_2}\partial_{\nu_1}\sigma^i(x), \ldots)$$

L'insieme delle funzioni di classe $\mathcal{C}^\infty$ da $J^\infty(Z)$ a $\mathbb{R}$, che viene indicato con $\mathfrak{F}(J^\infty(Z)) \equiv \mathcal{C}^\infty(J^\infty(Z);\mathbb{R})$, è il limite induttivo[4]

$$\mathfrak{F}(J^\infty(Z)) = \varinjlim \mathfrak{F}(J^r(Z))$$

della successione

$$\begin{aligned}\mathfrak{F}(M) \xrightarrow{(\zeta)^*} \mathfrak{F}(Z) \xrightarrow{(\zeta^1_0)^*} \mathfrak{F}(J^1(Z)) \xrightarrow{(\zeta^2_1)^*} \mathfrak{F}(J^2(Z)) \xrightarrow{(\zeta^3_2)^*} \ldots \\ \xrightarrow{(\zeta^r_{r-1})^*} \mathfrak{F}(J^r(Z)) \xrightarrow{(\zeta^{r+1}_r)^*} \mathfrak{F}(J^{r+1}(Z)) \xrightarrow{(\zeta^{r+2}_{r+1})^*} \ldots\end{aligned}$$

di immersioni. Gli elementi di $\mathfrak{F}(J^\infty(Z))$ sono controimmagini del tipo $(\zeta^\infty_r)^*(f)$ dove $f \in \mathfrak{F}(J^r(Z))$. La funzione $(\zeta^\infty_r)^*(f)$ verrà indicata ancora con $f = f(x^\alpha, z^i, z^i_\nu, z^i_{\nu_1\nu_2}, \ldots, z^i_{\nu_1\nu_2\ldots\nu_r})$.

[4]In questo caso, il limite induttivo è definito dall'insieme quoziente dell'unione disgiunta $\bigsqcup_{r\in\mathbb{N}} \mathfrak{F}(J^r(Z))$ rispetto alla relazione di equivalenza $\sim$ definita da $f_r \in J^r(Z)$ e $f_s \in J^s(Z)$ sono equivalenti se esiste un $k \geq r, s$ tale che $(\zeta^k_r)^*(f_r) = (\zeta^k_s)^*(f_s)$.

L'insieme delle k-forme differenziali $\boldsymbol{\Omega}^k(J^\infty(Z))$ è il limite induttivo

$$\boldsymbol{\Omega}^k(J^\infty(Z)) = \varinjlim \boldsymbol{\Omega}^k(J^r(Z))$$

della successione

$$\boldsymbol{\Omega}^k(M) \xrightarrow{(\zeta)^*} \boldsymbol{\Omega}^k(Z) \xrightarrow{(\zeta_0^1)^*} \boldsymbol{\Omega}^k(J^1(Z)) \xrightarrow{(\zeta_1^2)^*} \boldsymbol{\Omega}^k(J^2(Z)) \xrightarrow{(\zeta_2^3)^*} \dots$$
$$\xrightarrow{(\zeta_{r-1}^r)^*} \boldsymbol{\Omega}^k(J^r(Z)) \xrightarrow{(\zeta_r^{r+1})^*} \boldsymbol{\Omega}^k(J^{r+1}(Z)) \xrightarrow{(\zeta_{r+1}^{r+2})^*} \dots$$

di immersioni. Gli elementi di $\boldsymbol{\Omega}^k(J^\infty(Z))$ sono controimmagini del tipo $(\zeta_r^\infty)^*(\underline{\boldsymbol{\omega}})$ dove $\underline{\boldsymbol{\omega}} \in \boldsymbol{\Omega}^k(J^r(Z))$ ed anche in questo caso scriveremo $\underline{\boldsymbol{\omega}}$ invece di $(\zeta_r^\infty)^*(\underline{\boldsymbol{\omega}})$. In particolare si ha

$$d((\zeta_r^\infty)^*(\underline{\boldsymbol{\omega}})) = (\zeta_r^\infty)^*(d\underline{\boldsymbol{\omega}}).$$

Possiamo definire le 1-forme di contatto $\boldsymbol{\mathcal{K}}^1(J^\infty(Z))$ in maniera analoga a quanto fatto per $\boldsymbol{\Omega}^1(J^\infty(Z))$, oppure dire che $\underline{\boldsymbol{\omega}} \in \boldsymbol{\Omega}^1(J^\infty(Z))$ è una 1-forma di contatto se e solo se per ogni sezione σ si ha $(j^\infty(\sigma))^*(\underline{\boldsymbol{\omega}}) = 0$.

Per quanto riguarda l'insieme $\boldsymbol{\mathcal{T}}_k^0(J^\infty(Z))$ dei campi di tensori covarianti su $J^\infty(Z)$ si può procedere senza particolari problemi come fatto per le forme differenziali.

FINE LEZIONE 19 MMdFC (2023-05-05 ore 14:00 – 16:00)

Riferimenti bibliografici

[1] S. Kobayashi, K. Nomizu: *Foundations of Differential Geometry, Vol. I*; John Wiley & Sons, New York · Chichester · Brisbane · Toronto · Singapore, 1963.

[2] S. Kobayashi, K. Nomizu: *Foundations of Differential Geometry, Vol. II*; John Wiley & Sons, New York · Chichester · Brisbane · Toronto, 1969.

[3] J. Dieudonné: *Éléments d'analyse 1 / Fondements de l'analyse moderne*; Gauthier–Villars, Paris, 1969.

[4] J. Dieudonné: *Éléments d'analyse 3*; Gauthier–Villars, Paris, 1969.

[5] P.L. García–Pérez: *Connections and* 1*–jet Fiber Bundles*, Rend. Sem. Mat. Univ. Padova **47**, 227–242 (1972).

[6] I. Kolář, P.W. Michor, J. Slovák: *Natural Operations in Differential Geometry*, Springer–Verlag, Berlin Heidelberg 1993.

[7] P.J. Olver: *Equivalence, Invariants and Symmetry*; Cambridge University Press, 1995.

[8] J. E. Marsden, T. Ratiu, R. Abraham: *Manifolds, tensor analysis and applications, Third Edition*; Springer–Verlag, 2001.

[9] M. Ferraris: *Appunti di agebra lineare, multilineare e tensori*; 2023.

[10] M. Ferraris: *Appunti di calcolo differenziale*; 2023.

[11] M. Ferraris: *Appunti di calcolo sulle varietà differenziabili*; 2023.

[12] M. Ferraris: *Appunti sui gruppi di Lie*; 2023.