Per quanto riguarda gli insiemi $\mathfrak{X}(J^\infty(Z))$ dei campi di vettori e altri tipi di tensori controvarianti e/o misti $\boldsymbol{\mathcal{T}}^r_s(J^\infty(Z))$, con $r > 0$ e $s \geq 0$, le cose si complicano perché non è possibile definire le controimmagini attraverso le proiezioni ζ^∞_r.

3.1 Forme di contatto

Sui prolungamenti di varietà fibrate come $J^k(Z)$, con $k \geq 1$, esistono delle 1–forme speciali che si chiamano 1–*forme di contatto.*

Definizione 3.1. *Una* 1–forma di contatto *è una 1-forma* $\underline{\boldsymbol{\omega}} \in \boldsymbol{\Omega}^1(J^k(Z))$ *tale che per ogni sezione (locale o globale)* $\sigma : U \longrightarrow Z$ *sia* $\left(j^k(\sigma)\right)^* (\underline{\boldsymbol{\omega}}) = 0$*. Le 1–forme di contatto formano un* $\mathfrak{F}(J^k(Z))$*–sottomodulo* $\boldsymbol{\mathcal{K}}^1(J^k(Z))$ *del* $\mathfrak{F}(J^k(Z))$*–modulo* $\boldsymbol{\Omega}^1(J^k(Z))$*.*

Una base[5] locale per le 1–forme di contatto è data dalle 1–forme

$$
\begin{aligned}
\underline{\boldsymbol{\omega}}^i &= d\,z^i - z^i_\kappa\,d\,x^\kappa \\
\underline{\boldsymbol{\omega}}^i_\nu &= d\,z^i_\nu - z^i_{\nu\kappa}\,d\,x^\kappa \\
\underline{\boldsymbol{\omega}}^i_{\nu_1\nu_2} &= d\,z^i_{\nu_1\nu_2} - z^i_{\nu_1\nu_2\kappa}\,d\,x^\kappa \\
&\vdots \\
\underline{\boldsymbol{\omega}}^i_{\nu_1\ldots\nu_r} &= d\,z^i_{\nu_1\ldots\nu_r} - z^i_{\nu_1\ldots\nu_r\kappa}\,d\,x^\kappa
\end{aligned}
$$

[5] Quando $k > 2$ le forme sono un insieme di generatori perché le 1-forme $\underline{\boldsymbol{\omega}}^i_{\nu_1\ldots\nu_r}$ sono simmetriche rispetto agli indici $\nu_1\ldots\nu_r$ e, quindi, non sono linearmente indipendenti. Per estrarre una base si procede come al solito richiedendo che gli indici siano ordinati $\nu_1 \leq \ldots \leq \nu_r$.

$$\vdots$$

$$\underline{\boldsymbol{\omega}}^i_{\nu_2\ldots\nu_k} \;=\; d\, z^i_{\nu_2\ldots\nu_k} - z^i_{\nu_2\ldots\nu_k\kappa}\, d\, x^\kappa$$

Dimostrazione. Le 1-forme $(\underline{\boldsymbol{\omega}}^i, \underline{\boldsymbol{\omega}}^i_\nu, \underline{\boldsymbol{\omega}}^i_{\nu_1\nu_2}, \ldots, \underline{\boldsymbol{\omega}}^i_{\nu_2\ldots\nu_k})$ sono evidentemente 1-forme di contatto.

Per ogni 1-forma $\underline{\boldsymbol{\alpha}} \in \boldsymbol{\Omega}^1(J^k(Z))$ si ha

$$\begin{aligned}
\underline{\boldsymbol{\alpha}} &= \alpha_\kappa(\ldots)dx^\kappa + \alpha_i(\ldots)dz^i + \alpha_i^\nu(\ldots)dz^i_\nu + \alpha_i^{\nu_1\nu_2}(\ldots)dz^i_{\nu_1\nu_2} + \ldots \\
&\quad + \alpha_i^{\nu_1\ldots\nu_{k-1}}(\ldots)dz^i_{\nu_1\ldots\nu_{k-1}} + \alpha_i^{\nu_1\ldots\nu_k}(\ldots)dz^i_{\nu_1\ldots\nu_k} \\
&= \left(\alpha_\kappa(\ldots) + \alpha_i(\ldots)z^i_\kappa + \alpha_i^\nu(\ldots)z^i_{\nu\kappa} + \alpha_i^{\nu_1\nu_2}(\ldots)z^i_{\nu_1\nu_2\kappa} + \ldots + \alpha_i^{\nu_1\ldots\nu_{k-1}}(\ldots)z^i_{\nu_1\ldots\nu_{k-1}\kappa}\right) dx^\kappa \\
&\quad + \alpha_i(\ldots)\underline{\boldsymbol{\omega}}^i + \alpha_i^\nu(\ldots)\underline{\boldsymbol{\omega}}^i_\nu + \alpha_i^{\nu_1\nu_2}(\ldots)\underline{\boldsymbol{\omega}}^i_{\nu_1\nu_2} + \ldots + \alpha_i^{\nu_1\ldots\nu_{k-1}}(\ldots)\underline{\boldsymbol{\omega}}^i_{\nu_1\ldots\nu_{k-1}} \\
&\quad + \alpha_i^{\nu_1\ldots\nu_k}(\ldots)dz^i_{\nu_1\ldots\nu_k}
\end{aligned}$$

I coefficienti $\alpha_i^{\nu_1\ldots\nu_r} \in \mathfrak{F}(J^k(Z))$ sono definiti univocamente se e solo se sono simmetrici rispetto agli indici $\nu_1 \ldots \nu_r$. I coefficienti $\alpha_i, \alpha_i^\nu, \alpha_i^{\nu_1\nu_2}, \ldots, \alpha_i^{\nu_1\ldots\nu_{k-1}} \in \mathfrak{F}(J^k(Z))$ che moltiplicano le 1-forme $\underline{\boldsymbol{\omega}}$ possono essere funzioni arbitrarie e deve essere

$$\left(\alpha_\kappa + \alpha_i z^i_\kappa + \alpha_i^\nu z^i_{\nu\kappa} + \alpha_i^{\nu_1\nu_2} z^i_{\nu_1\nu_2\kappa} + \ldots + \alpha_i^{\nu_1\ldots\nu_{k-1}} z^i_{\nu_1\ldots\nu_{k-1}\kappa}\right) = 0 \tag{2}$$

da cui si deduce che

$$\alpha_\kappa = -\left(\alpha_i z^i_\kappa + \alpha_i^\nu z^i_{\nu\kappa} + \alpha_i^{\nu_1\nu_2} z^i_{\nu_1\nu_2\kappa} + \ldots + \alpha_i^{\nu_1\ldots\nu_{k-1}} z^i_{\nu_1\ldots\nu_{k-1}\kappa}\right) \tag{3}$$

Infine, per ogni sezione σ deve essere

$$\alpha_i^{\nu_1\dots\nu_k}(j_x^k(\sigma))\partial_\kappa\partial_{\nu_k}\cdots\partial_{\nu_1}\sigma^i(x)=0 \qquad (4)$$

e, quindi, deve essere

$$\alpha_i^{\nu_1\dots\nu_k}\equiv 0$$

Concludendo, si ha che $\underline{\boldsymbol{\alpha}}\in\boldsymbol{\mathcal{K}}^1(J^k(Z))$ se e solo se:

$$\underline{\boldsymbol{\alpha}}=\alpha_i(\dots)\underline{\boldsymbol{\omega}}^i+\alpha_i^{\nu}(\dots)\underline{\boldsymbol{\omega}}^i_{\nu}+\alpha_i^{\nu_1\nu_2}(\dots)\underline{\boldsymbol{\omega}}^i_{\nu_1\nu_2}+\ldots+\alpha_i^{\nu_1\dots\nu_{k-1}}(\dots)\underline{\boldsymbol{\omega}}^i_{\nu_1\dots\nu_{k-1}}$$

in un sistema di “coordinate fibrate naturali” $(x^\alpha,z^i,z^i_\nu,z^i_{\nu_1\nu_2},\dots,z^i_{\nu_1\nu_2\dots\nu_k})$. Se l'identità vale in un sistema di coordinate fibrate naturali allora vale in tutti i sistemi di coordinate fibrate naturali.

■

Per ogni 1-forma $\underline{\boldsymbol{\alpha}}\in\boldsymbol{\Omega}^1(J^k(Z))$, la 1-forma $(\zeta_k^{k+1})^*(\underline{\boldsymbol{\alpha}})\in\boldsymbol{\Omega}^1(J^{k+1}(Z))$ può essere scomposta nella somma di una 1-forma orizzontale $h(\underline{\boldsymbol{\alpha}})\in\boldsymbol{\Omega}^1_H(J^{k+1}(Z))$ e di una 1-forma di contatto $k(\underline{\boldsymbol{\alpha}})\in\boldsymbol{\mathcal{K}}^1(J^{k+1}(Z))$

La 1-forma orizzontale $h(\underline{\boldsymbol{\alpha}})$, detta *parte orizzontale* di $\underline{\boldsymbol{\alpha}}$, è definita come l'unica forma $h(\underline{\boldsymbol{\alpha}})\in\boldsymbol{\Omega}^1_H(J^{k+1}(Z))$ tale che per ogni sezione (locale o globale) $\sigma:U\longrightarrow Z$ si abbia:

$$(j^{k+1}(\sigma))^*(h(\underline{\boldsymbol{\alpha}}))=(j^k(\sigma))^*(\underline{\boldsymbol{\alpha}})$$

Se in un sistema di coordinate fibrate naturali $(x^\alpha, z^i, z^i_\nu, z^i_{\nu_1\nu_2}, \ldots, z^i_{\nu_1\nu_2\ldots\nu_k})$ la 1-forma è

$$\underline{\boldsymbol{\alpha}} \;=\; \alpha_\kappa dx^\kappa + \alpha_i dz^i + \alpha_i^\nu dz^i_\nu + \alpha_i^{\nu_1\nu_2} dz^i_{\nu_1\nu_2} + \ldots + \alpha_i^{\nu_1\ldots\nu_k} dz^i_{\nu_1\ldots\nu_k}$$

dove $\alpha_i, \alpha_i^\nu, \alpha_i^{\nu_1\nu_2}, \ldots, \alpha_i^{\nu_1\ldots\nu_k} \in \mathfrak{F}(J^k(Z))$ ed i coefficienti $\alpha_i^{\nu_1\ldots\nu_r}$ sono simmetrici, allora la 1-forma orizzontale $h(\underline{\boldsymbol{\alpha}})$ è data da

$$h(\underline{\boldsymbol{\alpha}}) \;=\; \left(\alpha_\sigma + \alpha_i z^i_\sigma + \alpha_i^\nu z^i_{\nu\sigma} + \alpha_i^{\nu_1\nu_2} z^i_{\nu_1\nu_2\sigma} + \ldots + \alpha_i^{\nu_1\ldots\nu_k} z^i_{\nu_1\ldots\nu_k\sigma}\right) dx^\sigma$$

La 1-forma di contatto $k(\underline{\boldsymbol{\alpha}}) = (\zeta_k^{k+1})^*(\underline{\boldsymbol{\alpha}}) - h(\underline{\boldsymbol{\alpha}})$ è definita da

$$\underline{\boldsymbol{\alpha}} \;=\; \alpha_i \underline{\boldsymbol{\omega}}^i + \alpha_i^\nu \underline{\boldsymbol{\omega}}^i_\nu + \alpha_i^{\nu_1\nu_2} \underline{\boldsymbol{\omega}}^i_{\nu_1\nu_2} + \ldots + \alpha_i^{\nu_1\ldots\nu_k} \underline{\boldsymbol{\omega}}^i_{\nu_1\ldots\nu_k}$$

Per ogni funzione $f \in \mathfrak{F}(J^k(Z))$, il differenziale esterno $df \in \boldsymbol{\Omega}^1(J^k(Z))$ induce due 1-forme $d_H(f) = h(df) \in \boldsymbol{\Omega}^1_H(J^{k+1}(Z))$ e $d_V(f) = k(df) \in \boldsymbol{\mathcal{K}}^1(J^{k+1}(Z))$ che chiameremo rispettivamente *differenziale orizzontale* e *differenziale verticale* della funzione f.

Se utilizziamo un sistema di coordinate fibrate naturali $(x^\alpha, z^i, z^i_\nu, z^i_{\nu_1\nu_2}, \ldots, z^i_{\nu_1\nu_2\ldots\nu_k})$ il differenziale df sarà espresso da una formula del tipo

$$df \;=\; \vec{\partial}_\kappa(f) dx^\kappa + \vec{\partial}_i(f) dz^i + \vec{\partial}_i^\nu(f) dz^i_\nu + \vec{\partial}_i^{\nu_1\nu_2}(f) dz^i_{\nu_1\nu_2} + \ldots + \vec{\partial}_i^{\nu_1\ldots\nu_k}(f) dz^i_{\nu_1\ldots\nu_k}$$

I coefficienti $(\vec{\partial}_\kappa(f), \vec{\partial}_i(f), \vec{\partial}_i^\nu(f), \vec{\partial}_i^{\nu_1\nu_2}(f), \ldots, \vec{\partial}_i^{\nu_1\ldots\nu_k}(f))$ sono determinati univocamente dalla richiesta che i coefficienti $\vec{\partial}_i^{\nu_1\ldots\nu_r}(f)$ siano simmetrici negli indici $\nu_1 \ldots \nu_r$. Si ha ovviamente che

$$\vec{\partial}_\kappa(f) \;=\; \frac{\partial f}{\partial x^\kappa}$$

$$\vec{\partial}_i(f) = \frac{\partial f}{\partial z^i}$$
$$\vec{\partial}_i^{\nu}(f) = \frac{\partial f}{\partial z^i_\nu}$$

ma non potremo scrivere

$$\vec{\partial}_i^{\nu_1\ldots\nu_r}(f) = \frac{\partial f}{\partial z^i_{\nu_1\ldots\nu_r}}\,,$$

come si vede erroneamente scritto in alcuni libri o articoli, perché le $z^i_{\nu_1\ldots\nu_r}$ non sono vere coordinate.

Osservazione 3.2. [Coordinate fibrate naturali su $J^1(Z)$]

Ogni sistema di coordinate fibrate (x^α, z^i) su una varietà fibrata $\zeta : Z \longrightarrow M$ induce un sistema di *coordinate fibrate naturali* $(x^\alpha, z^i, z^i_\alpha)$ su $J^1(Z)$.

Ricordando che una trasformazione di coordinate di coordinate fibrate su Z è del tipo

$$(x^\alpha, z^i) \longmapsto (x'^{\alpha'} = \varphi'^{\alpha'}(x^\alpha), z'^{i'} = \Phi'^{i'}(x^\alpha, z^i))\,,$$

con trasformazione inversa

$$(x'^{\alpha'}, z'^{i'}) \longmapsto (x^\alpha = \varphi^\alpha(x'^{\alpha'}), z^i = \Phi^i(x'^{\alpha'}, z'^{i'}))\,,$$

la trasformazione di coordinate fibrate naturali indotta su $J^1(Z)$ sarà

$$(x^\alpha, z^i, z^i_\alpha) \longmapsto (x'^{\alpha'} = \varphi'^{\alpha'}(x^\alpha), z'^{i'} = \Phi'^{i'}(x^\alpha, z^i)), z'^{i'}_{\alpha'} = \Phi'^{i'}_{\alpha'}(x^\alpha, z^i, z^i_\alpha))\,,$$

dove si è posto

$$\begin{aligned}\Phi'^{i'}_{\alpha'}(x^\alpha, z^i, z^i_\alpha) &= \frac{d}{dx'^{\alpha'}}\Phi'^{i'}(x^\alpha, z^i)\\ &= X^\alpha_{\alpha'}(x)\frac{d}{dx^\alpha}\Phi'^{i'}(x^\alpha, z^i)\\ &= \frac{\partial\varphi^\alpha}{\partial x'^{\alpha'}}(\varphi'(x))\left(\frac{\partial\Phi'^{i'}(x,z)}{\partial x^\alpha} + z^k_\alpha\frac{\partial\Phi'^{i'}(x,z)}{\partial z^k}\right)\end{aligned}$$

o, equivalentemente,

$$\Phi'^{i'}_{\alpha'}(x^\alpha, z^i, z^i_\alpha)\partial_\alpha\varphi'^{\alpha'}(x^\alpha) = \partial_\alpha\Phi'^{i'}(x,z) + z^k_\alpha\partial_k\Phi'^{i'}(x,z) \tag{5}$$

La legge di trasformazione (5) ci dice che le connessioni sulla varietà fibrata $\zeta : Z \longrightarrow M$ sono in corrispondenza biunivoca con le sezioni del fibrato affine $\zeta^1_0 : J^1(Z) \longrightarrow Z$ definendo la sezione con:

$$z^i_\alpha = -\Gamma^i_{\ \alpha}(x,z)$$

(il segno $-$ è una convenzione che dipende da come abbiamo definito le connessioni [11]).

Osservazione 3.3. [Coordinate fibrate naturali su $J^k(Z)$]
Quando $k \geq 2$ le *coordinate fibrate naturali* su $J^k(Z)$ saranno $(x^\alpha, z^i, z^i_\alpha, z^i_{\underline{\boldsymbol{\alpha}}})$, con $2 \leq |\underline{\boldsymbol{\alpha}}| \leq k$, oppure $(x^\alpha, z^i_{\underline{\boldsymbol{\alpha}}})$, con $0 \leq |\underline{\boldsymbol{\alpha}}| \leq k$.

Le *"coordinate fibrate naturali simmetriche"* $(x^\alpha, z^i, z^i_\alpha, z^i_{\alpha_1\alpha_2}, \ldots, z^i_{\alpha_1\ldots\alpha_k})$ su $J^k(Z)$ sono legate alle coordinate fibrate naturali $(x^\alpha, z^i, z^i_\alpha, z^i_{\underline{\boldsymbol{\alpha}}})$ dalle relazioni

$$z^i_{\alpha_1\ldots\alpha_r} = z^i_{\underline{\mathbf{1}}_{\alpha_1}+\ldots+\underline{\mathbf{1}}_{\alpha_r}} \qquad (2 \le r \le k)$$

Gli operatori differenziali $\vec{\partial}_i^{\nu_1\ldots\nu_r}(f)$ sono legati alle derivate parziali rispetto alle coordinate $z^i_{\underline{\boldsymbol{\sigma}}}$, con $|\underline{\boldsymbol{\sigma}}| = r$, dalle formule

$$\vec{\partial}_i^{\nu_1\ldots\nu_r}(f) = w(\underline{\boldsymbol{\sigma}})\frac{\partial f}{\partial z^i_{\underline{\boldsymbol{\sigma}}}} = w(\underline{\boldsymbol{\sigma}})\vec{\partial}_i^{\underline{\boldsymbol{\sigma}}}(f) \qquad \text{dove} \qquad \underline{\boldsymbol{\sigma}} = \underline{\mathbf{1}}_{\nu_1} + \ldots + \underline{\mathbf{1}}_{\nu_r}$$

Calcolando il differenziale orizzontale $d_H(f)$ si ottiene

$$\begin{aligned} d_H(f) &= \frac{d\,f}{d\,x^\kappa}\,d\,x^\kappa \\ &= \left(\vec{\partial}_\kappa(f) + \vec{\partial}_i(f) z^i_\kappa + \vec{\partial}_i^{\nu}(f) z^i_{\nu\kappa} + \vec{\partial}_i^{\nu_1\nu_2}(f) z^i_{\nu_1\nu_2\kappa} + \ldots + \vec{\partial}_i^{\nu_1\ldots\nu_k}(f) z^i_{\nu_1\ldots\nu_k\kappa}\right) d\,x^\kappa \end{aligned}$$

definendo anche le *derivate parziali formali*

$$\begin{aligned} d_\kappa(f) = \frac{d\,f}{d\,x^\kappa} &= \vec{\partial}_\kappa(f) + \vec{\partial}_i(f) z^i_\kappa + \vec{\partial}_i^{\nu}(f) z^i_{\nu\kappa} + \vec{\partial}_i^{\nu_1\nu_2}(f) z^i_{\nu_1\nu_2\kappa} + \ldots + \vec{\partial}_i^{\nu_1\ldots\nu_k}(f) z^i_{\nu_1\ldots\nu_k\kappa} \\ &= \vec{\partial}_\kappa(f) + \vec{\partial}_i(f) z^i_\kappa + \sum_{1\le|\underline{\boldsymbol{\nu}}|\le k} \vec{\partial}_i^{\underline{\boldsymbol{\nu}}}(f) z^i_{\underline{\boldsymbol{\nu}}+\underline{\mathbf{1}}_\kappa} \end{aligned}$$

che sono funzioni appartenenti a $\mathfrak{F}(J^{k+1}(Z))$.

Il differenziale verticale $d_V(f)$ è, quindi, dato da

$$d_V(f) = \vec{\partial}_i(f)\underline{\boldsymbol{\omega}}^i + \vec{\partial}_i^{\nu}(f)\underline{\boldsymbol{\omega}}^i_\nu + \vec{\partial}_i^{\nu_1\nu_2}(f)\underline{\boldsymbol{\omega}}^i_{\nu_1\nu_2} + \ldots + \vec{\partial}_i^{\nu_1\ldots\nu_k}(f)\underline{\boldsymbol{\omega}}^i_{\nu_1\ldots\nu_k}$$

$$= \vec{\partial}_i(f)\underline{\boldsymbol{\omega}}^i + \vec{\partial}_i^{\nu}(f)\underline{\boldsymbol{\omega}}^i_{\nu} + \sum_{2\le|\underline{\boldsymbol{\nu}}|\le k} \vec{\partial}_i^{\boldsymbol{\nu}}(f)\underline{\boldsymbol{\omega}}^i_{\underline{\boldsymbol{\nu}}}$$

Se $\underline{\boldsymbol{\omega}} \in \boldsymbol{\Omega}^1(J^\infty(Z))$ possiamo definire senza alcun problema particolare la parte orizzontale $h(\underline{\boldsymbol{\omega}}) \in \boldsymbol{\Omega}^1_H(J^\infty(Z))$ e la parte di contatto $k(\underline{\boldsymbol{\omega}}) \in \boldsymbol{\mathcal{K}}^1(J^\infty(Z))$. Ovviamente, si ha $\underline{\boldsymbol{\omega}} = h(\underline{\boldsymbol{\omega}}) + k(\underline{\boldsymbol{\omega}})$ senza bisogno di usare le controimmagini attraverso le proiezioni del tipo ζ_k^{k+1}.

Se $f \in \mathfrak{F}(J^\infty(Z))$ possiamo definire senza particolari problemi il differenziale orizzontale $d_H(f) \in \boldsymbol{\Omega}^1_H(J^\infty(Z))$ ed il differenziale verticale $d_V(f) \in \boldsymbol{\mathcal{K}}^1(J^\infty(Z))$. Ovviamente si ha

$$d\,f = d_H(f) + d_V(f)$$

senza bisogno di usare le controimmagini attraverso le proiezioni del tipo ζ_k^{k+1}. A livello di moduli si ha

$$\boldsymbol{\Omega}^1(J^\infty(Z)) = \boldsymbol{\Omega}^1_H(J^\infty(Z)) \oplus \boldsymbol{\mathcal{K}}^1(J^\infty(Z)) = \boldsymbol{\mathcal{K}}^1(J^\infty(Z)) \oplus \boldsymbol{\Omega}^1_H(J^\infty(Z))$$

Il modulo $\boldsymbol{\Omega}^k(J^\infty(Z))$, con $k > 1$, può essere scomposto nella somma diretta

$$\boldsymbol{\Omega}^k(J^\infty(Z)) = \bigoplus_{\substack{0\le s\le m,\\ 0\le r\ \wedge\ r+s=k}} \boldsymbol{\mathcal{H}}^r_s(J^\infty(Z))$$

di componenti omogenee $\boldsymbol{\mathcal{H}}^r_s(J^\infty(Z))$ che sono r volte di contatto ed s volte orizzontali. I moduli $\boldsymbol{\mathcal{H}}^r_s(J^\infty(Z))$ sono definiti da

$$\boldsymbol{\mathcal{H}}^r_s(J^\infty(Z)) = (\boldsymbol{\mathcal{K}}^1(J^\infty(Z)))^{\wedge\, r} \wedge (\boldsymbol{\Omega}^1_H(J^\infty(Z)))^{\wedge\, s}$$

Cioè: gli elementi di $\boldsymbol{\mathcal{H}}^r_s(J^\infty(Z))$ sono combinazioni lineari di prodotti esterni di r 1-forme di contatto e di s 1-forme orizzontali. Se $s > m = \dim(M)$ si ha, ovviamente, $\boldsymbol{\mathcal{H}}^r_s(J^\infty(Z)) = \{\underline{\mathbf{0}}\}$. Il differenziale esterno induce due operatori differenziali

$$\begin{aligned} d_H \ &: \ \boldsymbol{\mathcal{H}}^r_s(J^\infty(Z)) \longrightarrow \boldsymbol{\mathcal{H}}^r_{s+1}(J^\infty(Z)) \\ d_V \ &: \ \boldsymbol{\mathcal{H}}^r_s(J^\infty(Z)) \longrightarrow \boldsymbol{\mathcal{H}}^{r+1}_s(J^\infty(Z)) \end{aligned}$$

che hanno come somma il differenziale esterno $d = d_H + d_V$ e che generalizzano il differenziale orizzontale ed il differenziale verticale definiti per le funzioni. Dall'identità $d \circ d = 0$ si deducono le identità

$$d_H \circ d_H = 0 \qquad , \qquad d_V \circ d_H + d_H \circ d_V = 0 \qquad , \qquad d_V \circ d_V = 0\,.$$

3.2 Prolungamenti di campi di vettori su varietà fibrate

In molte applicazioni avremo bisogno di considerare campi di vettori speciali sui prolungamenti $J^k(Z)$ di una varietà fibrata $\zeta : Z \longrightarrow M$. I campi di vettori $\vec{\Xi}^{(k)} \in \mathfrak{X}(J^k(Z))$ che conservano le 1-forme di contatto nel senso che

$$\underline{\boldsymbol{\alpha}} \in \boldsymbol{\mathcal{K}}^1(J^k(Z)) \qquad \Longrightarrow \qquad \pounds_{\vec{\Xi}^{(k)}}(\underline{\boldsymbol{\alpha}}) \in \boldsymbol{\mathcal{K}}^1(J^k(Z)).$$

verranno chiamati *trasformazioni infinitesime di contatto* e formano un sottospazio vettoriale di dimensione infinita $\mathfrak{X}^{K}(J^k(Z)) \subset \mathfrak{X}(J^k(Z))$.

Esempio 3.2. [Prolungamenti del prim'ordine di campi di vettori]

Consideriamo le trasformazioni infinitesime di contatto su $J^1(Z)$. Scelto un sistema di coordinate fibrate naturali (x^κ, z^i, z^i_ν) su $J^1(Z)$, sappiamo che le 1-forme di contatto $\underline{\boldsymbol{\alpha}} \in \boldsymbol{\mathcal{K}}^1(J^1(Z))$ avranno un'espressione del tipo

$$\underline{\boldsymbol{\alpha}} = \alpha_r(x^\kappa, z^i, z^i_\nu)\underline{\boldsymbol{\omega}}^r \qquad \text{con} \qquad \underline{\boldsymbol{\omega}}^r = dz^r - z^r_\sigma dx^\sigma$$

e, quindi,

$$\pounds_{\vec{\Xi}^{(1)}}(\underline{\boldsymbol{\alpha}}) = \vec{\Xi}^{(1)}(\alpha_r)\underline{\boldsymbol{\omega}}^r + \alpha_r \pounds_{\vec{\Xi}^{(1)}}(\underline{\boldsymbol{\omega}}^r)\,.$$

Siccome $\vec{\Xi}^{(1)}(\alpha_r)\underline{\boldsymbol{\omega}}^r$ è una 1-forma di contatto, basta richiedere che tutte le 1-forme $\pounds_{\vec{\Xi}^{(1)}}(\underline{\boldsymbol{\omega}}^r)$ siano 1-forme di contatto. Per utilizzare la formula di Cartan dobbiamo calcolare i differenziali

$$d\underline{\boldsymbol{\omega}}^r = -dz^r_\sigma \wedge dx^\sigma\,.$$

I differenziali delle funzioni $f \in \mathfrak{F}(J^1(Z))$ si possono scrivere

$$\begin{aligned} d(f) &= \partial_\alpha(f)dx^\alpha + \partial_i(f)dz^i + \partial^\alpha_i(f)dz^i_\alpha \\ &= \big(\partial_\alpha(f) + z^i_\alpha\partial_i(f)\big)\,dx^\alpha + \partial_i(f)\underline{\boldsymbol{\omega}}^i + \partial^\alpha_i(f)dz^i_\alpha \\ &= D_\alpha(f)dx^\alpha + \partial_i(f)\underline{\boldsymbol{\omega}}^i + \partial^\alpha_i(f)dz^i_\alpha \end{aligned}$$

dove si è posto $D_\alpha = \partial_\alpha + z^k_\alpha\partial_k$.

Rappresentando il campo di vettori $\vec{\Xi}^{(1)}$ con il sistema di coordinate (x^κ, z^i, z^i_ν) su $J^1(Z)$ abbiamo

$$\vec{\Xi}^{(1)} = \xi^\lambda(x^\kappa, z^i, z^i_\nu)\vec{\partial}_\lambda + \xi^s(x^\kappa, z^i, z^i_\nu)\vec{\partial}_s + \xi^s_\lambda(x^\kappa, z^i, z^i_\nu)\vec{\partial}_s^\lambda$$

e, quindi, si ha

$$\begin{aligned} \vec{\Xi}^{(1)} \rfloor \underline{\boldsymbol{\omega}}^r &= \xi^r(x^\kappa, z^i, z^i_\nu) - z^r_\sigma \xi^\sigma(x^\kappa, z^i, z^i_\nu) \\ \vec{\Xi}^{(1)} \rfloor d\underline{\boldsymbol{\omega}}^r &= -\xi^r_\lambda(x^\kappa, z^i, z^i_\nu)dx^\lambda + \xi^\lambda(x^\kappa, z^i, z^i_\nu)dz^r_\lambda \end{aligned}$$

Calcolando la derivata di Lie $\pounds_{\vec{\Xi}^{(1)}}(\underline{\boldsymbol{\omega}}^r)$, otteniamo

$$\begin{aligned} \pounds_{\vec{\Xi}^{(1)}}(\underline{\boldsymbol{\omega}}^r) &= d(\vec{\Xi}^{(1)} \rfloor \underline{\boldsymbol{\omega}}^r) + \vec{\Xi}^{(1)} \rfloor d\underline{\boldsymbol{\omega}}^r \\ &= d\bar{\xi}^r + \xi^\sigma dz^r_\sigma - \xi^r_\alpha dx^\alpha \\ &= \left(D_\alpha \bar{\xi}^r - \xi^r_\alpha\right) dx^\alpha + \partial_i \bar{\xi}^r \underline{\boldsymbol{\omega}}^i + (\partial^\mu_i \bar{\xi}^r + \xi^\mu \delta^r_i) dz^i_\mu \end{aligned}$$

dove si è posto $\bar{\xi}^r = \xi^r - z^r_\sigma \xi^\sigma$. Quindi deve essere

$$D_\alpha \bar{\xi}^r - \xi^r_\alpha = 0 \tag{6}$$

$$\partial^\mu_i \bar{\xi}^r + \xi^\mu \delta^r_i = 0 \tag{7}$$

L'equazione (6) ci dice sempre quanto valgono i coefficienti ξ^r_α

$$\xi^r_\alpha = D_\alpha \bar{\xi}^r$$

Esempio 3.3. [Prolungamenti del prim'ordine di campi di vettori]

Quando la dimensione delle fibre di Z è $n = \dim(Z) - \dim(M) = 1$, l'equazione (7) ci permette di calcolare quanto valgono i coefficienti ξ^μ

$$\xi^\mu = -\partial_1^\mu \bar{\xi}^1$$

in funzione della funzione arbitraria $f = \bar{\xi}^1 \in \mathfrak{F}(J^1(Z))$. Indicando con (x^κ, z, p_ν) le coordinate (x^κ, z^1, z^1_ν) possiamo affermare che il campo $\vec{\Xi}^{(1)} \in \mathfrak{X}(J^1(Z))$ è una trasformazione infinitesima di contatto se e solo se esiste una funzione $f(x, z, p)$ tale che

$$\vec{\Xi}^{(1)} = \left(\frac{\partial f}{\partial x^\alpha}\right)\frac{\partial}{\partial p_\alpha} + \left(f - p_\alpha \frac{\partial f}{\partial p_\alpha}\right)\frac{\partial}{\partial z} - \left(\frac{\partial f}{\partial p_\alpha}\right)\frac{\partial}{\partial x^\alpha}$$

Esempio 3.4. [Prolungamenti del prim'ordine di campi di vettori]

Quando la dimensione delle fibre di Z è $n = \dim(Z) - \dim(M) > 1$, per scoprire tutte le conseguenze dell'equazione (7) dobbiamo prima derivarla rispetto a z^k_ν

$$\partial_k^\nu \partial_i^\mu \bar{\xi}^r + \delta_i^r \partial_k^\nu \xi^\mu = 0$$

poi sfruttare la simmetria $\partial_k^\nu \partial_i^\mu = \partial_i^\mu \partial_k^\nu$ per ottenere la condizione necessaria

$$\delta_i^r \partial_k^\nu \xi^\mu - \delta_k^r \partial_i^\mu \xi^\nu = 0$$

da cui, facendo la traccia, si ottiene l'ulteriore condizione necessaria

$$n\,\partial^\nu_k \xi^\mu - \partial^\mu_k \xi^\nu = 0$$

che, spezzandola nelle due equazioni

$$\begin{aligned} n\,\partial^{(\nu}_k \xi^{\mu)} - \partial^{(\mu}_k \xi^{\nu)} &= (n-1)\partial^{(\nu}_k \xi^{\mu)} = 0 \\ n\,\partial^{[\nu}_k \xi^{\mu]} - \partial^{[\mu}_k \xi^{\nu]} &= (n+1)\partial^{[\nu}_k \xi^{\mu]} = 0 \end{aligned}$$

si può risolvere, ottenendo $\partial^\nu_k \xi^\mu = 0$. Cioè: si deduce che le componenti ξ^μ non dipendono dalle coordinate (z^i_ν).

Reinserendo questa informazione nelle equazioni (7) si ha

$$\begin{aligned} 0 &= \partial^\mu_i \left(\bar{\xi}^r\right) + \xi^\mu \delta^r_i \\ &= \partial^\mu_i \left(\xi^r - \xi^\sigma z^r_\sigma\right) + \xi^\mu \delta^r_i \\ &= \left(\partial^\mu_i \xi^r - \xi^\sigma \partial^\mu_i z^r_\sigma\right) + \xi^\mu \delta^r_i \\ &= \left(\partial^\mu_i \xi^r - \xi^\sigma \delta^r_i \delta^\mu_\sigma\right) + \xi^\mu \delta^r_i \\ &= \partial^\mu_i \xi^r \end{aligned}$$

Cioè: si deduce che anche le componenti ξ^r non dipendono dalle coordinate (z^i_ν).

L'equazione (6) diventa quindi

$$\xi^r_\alpha = D_\alpha \bar{\xi}^r = D_\alpha \xi^r - z^r_\sigma D_\alpha \xi^\sigma = d_\alpha \xi^r - z^r_\sigma d_\alpha \xi^\sigma = d_\alpha \bar{\xi}^r + z^r_{\sigma\alpha} \xi^\sigma$$

Il campo di vettori

$$\vec{\Xi}^{(1)} = \xi^\lambda(x^\kappa, z^i)\vec{\partial}_\lambda + \xi^s(x^\kappa, z^i)\vec{\partial}_s + \xi^s_\lambda(x^\kappa, z^i, z^i_\nu)\vec{\partial}_s^\lambda$$

si proietta, attraverso la proiezione $\zeta^1_0 : J^1(Z) \longrightarrow Z$, sul campo

$$\vec{\Xi}^{(0)} = \xi^\lambda(x^\kappa, z^i)\vec{\partial}_\lambda + \xi^s(x^\kappa, z^i)\vec{\partial}_s \ \in \ \mathfrak{X}(Z)$$

e il diagramma

$$\begin{tikzcd}
T(J^1(Z)) \arrow[r, "T(\zeta^1_0)"] \arrow[d, "\tau_{J^1(Z)}"] & T(Z) \arrow[d, "\tau_Z"'] \\
J^1(Z) \arrow[r, "\zeta^1_0"'] \arrow[u, bend left, "\vec{\Xi}^{(1)}"] & Z \arrow[u, bend right, "\vec{\Xi}^{(0)}"']
\end{tikzcd}$$

è commutativo.

Indicando con $\vec{\Xi}$ il campo di vettori $\vec{\Xi}^{(0)} \in \mathfrak{X}(Z)$, il campo $\vec{\Xi}^{(1)} \in \mathfrak{X}(J^1(Z))$ viene indicato con $J^1(\vec{\Xi})$ e viene detto *prolungamento del prim'ordine* del campo di vettori $\vec{\Xi}$.

Un caso che per noi è interessante è quello in cui il campo $\vec{\xi}$ è proiettabile

$$\vec{\Xi} = \xi^\lambda(x^\kappa)\vec{\partial}_\lambda + \xi^s(x^\kappa, z^i)\vec{\partial}_s \ \in \ \mathfrak{X}_{_P}(Z)$$

e, quindi,

$$J^1(\vec{\Xi}) = \xi^\lambda(x^\kappa)\vec{\partial}_\lambda + \xi^s(x^\kappa, z^i)\vec{\partial}_s + \left(d_\lambda\xi^s - z^s_\sigma\partial_\lambda\xi^\sigma\right)\vec{\partial}_s^\lambda\,,$$

che è un campo proiettabile anche rispetto alla proiezione $\zeta^1 : J^1(Z) \longrightarrow M$. Il diagramma

$$\begin{tikzcd}
T(J^1(Z)) \arrow[rr, "T(\zeta_0^1)"] \arrow[d, "\tau_{J^1(Z)}"] & & T(Z) \arrow[rr, "T(\zeta)"] \arrow[d, "\tau_Z"'] & & T(M) \arrow[d, "\tau_M"'] \\
J^1(Z) \arrow[u, bend left, "J^1(\vec{\Xi})"] \arrow[rr, "\zeta_0^1"'] & & Z \arrow[u, bend right, "\vec{\Xi}"'] \arrow[rr, "\zeta"'] & & M \arrow[u, bend right, "\vec{\xi}"']
\end{tikzcd}$$

è commutativo.

Quando il campo $\vec{\Xi}$ è verticale

$$\vec{\Xi} = \xi^s(x^\kappa, z^i)\vec{\partial}_s \ \in \ \mathfrak{X}_{_V}(Z)$$

l'espressione del campo $J^1(\vec{\Xi})$ è particolarmente semplice

$$J^1(\vec{\Xi}) = \xi^s\vec{\partial}_s + d_\lambda(\xi^s)\vec{\partial}_s^{\lambda}$$

ed è verticale rispetto alla proiezione $\zeta^1 : J^1(Z) \longrightarrow M$.

Esempio 3.5. [Prolungamenti del second'ordine di campi di vettori]

Quando la dimensione delle fibre di Z è $n = \dim(Z) - \dim(M) > 1$, e $k = 2$ si può dimostrare che il campo di vettori $\vec{\Xi}^{(2)}$ ha la seguente espressione

$$\vec{\Xi}^{(2)} = \xi^\lambda(x^\kappa, z^i)\vec{\partial}_\lambda + \xi^s(x^\kappa, z^i)\vec{\partial}_s + \xi^s_\lambda(x^\kappa, z^i, z^i_\nu)\vec{\partial}^\lambda_s + \xi^s_{\lambda\rho}(x^\kappa, z^i, z^i_\nu, z^i_{\nu\sigma})\vec{\partial}^{\lambda\rho}_s \tag{8}$$

dove i coefficienti ξ^s_λ e $\xi^s_{\lambda\rho}$ sono dati da

$$\begin{aligned} \xi^r_\alpha &= d_\alpha\bar{\xi}^r + z^r_{\sigma\alpha}\xi^\sigma \\ &= d_\alpha\xi^r - z^r_\sigma d_\alpha\xi^\sigma \\ \xi^r_{\alpha\beta} &= d_\beta d_\alpha\bar{\xi}^r + z^r_{\sigma\alpha\beta}\xi^\sigma \\ &= d_\beta d_\alpha\xi^r - z^r_{\sigma\alpha}d_\beta\xi^\sigma - z^r_{\sigma\beta}d_\alpha\xi^\sigma - z^r_\sigma d_\beta d_\alpha\xi^\sigma \end{aligned}$$

Siccome $d_\beta d_\alpha = d_\alpha d_\beta$, i coefficienti $\xi^r_{\alpha\beta}$ sono simmetrici negli indici α e β (come deve essere).

Ci sono proiezioni naturali

$$\begin{array}{ccccc} \mathfrak{X}^K(J^2(Z)) & \longrightarrow & \mathfrak{X}^K(J^1(Z)) & \longrightarrow & \mathfrak{X}(Z) \\ \vec{\Xi}^{(2)} & \longmapsto & \vec{\Xi}^{(1)} & \longmapsto & \vec{\Xi}^{(0)} \end{array}$$

indotte dalle proiezioni $T(\zeta^2_1)$ e $T(\zeta^1_0)$.

Per dimostrare la (8) bisogna chiedere che $\pounds_{\vec{\Xi}}(\underline{\boldsymbol{\omega}}^r) \in \boldsymbol{\mathcal{K}}^1(J^2(Z))$ e $\pounds_{\vec{\Xi}}(\underline{\boldsymbol{\omega}}^r_\nu) \in \boldsymbol{\mathcal{K}}^1(J^2(Z))$. Partendo dall'espressione locale di $\vec{\Xi}^{(2)}$

$$\vec{\Xi}^{(2)} = \xi^\lambda\vec{\partial}_\lambda + \xi^s\vec{\partial}_s + \xi^s_\lambda\vec{\partial}^\lambda_s + \xi^s_{\lambda\rho}\vec{\partial}^{\lambda\rho}_s$$

e ricordando che

$$d\underline{\boldsymbol{\omega}}^r_\nu = -dz^r_{\sigma\nu} \wedge dx^\sigma \,,$$

si ha

$$\begin{aligned}
\vec{\Xi}^{(2)} \rfloor \, \underline{\boldsymbol{\omega}}^r &= \xi^r - z^r_\sigma \xi^\sigma \\
\vec{\Xi}^{(2)} \rfloor \, d\underline{\boldsymbol{\omega}}^r &= -\xi^r_\sigma dx^\sigma + \xi^\sigma dz^r_\sigma \\
\vec{\Xi}^{(2)} \rfloor \, \underline{\boldsymbol{\omega}}^r_\nu &= \xi^r_\nu - z^r_{\sigma\nu} \xi^\sigma \\
\vec{\Xi}^{(2)} \rfloor \, d\underline{\boldsymbol{\omega}}^r_\nu &= -\xi^r_{\sigma\nu} dx^\sigma + \xi^\sigma dz^r_{\sigma\nu}
\end{aligned}$$

da cui si deduce che

$$\begin{aligned}
\pounds_{\vec{\Xi}^{(2)}}(\underline{\boldsymbol{\omega}}^r) &= d(\xi^r - z^r_\sigma \xi^\sigma) + (\xi^\sigma dz^r_\sigma - \xi^r_\sigma dx^\sigma) \\
&= d(\bar{\xi}^r) + \xi^\sigma dz^r_\sigma - \xi^r_\sigma dx^\sigma \\
&= d\xi^r - z^r_\sigma d\xi^\sigma - \xi^r_\sigma dx^\sigma \\
\pounds_{\vec{\Xi}^{(2)}}(\underline{\boldsymbol{\omega}}^r_\nu) &= d(\xi^r_\nu - z^r_{\sigma\nu} \xi^\sigma) + (\xi^\sigma dz^r_{\sigma\nu} - \xi^r_{\sigma\nu} dx^\sigma) \\
&= d\xi^r_\nu - z^r_{\sigma\nu} d\xi^\sigma - \xi^r_{\sigma\nu} dx^\sigma
\end{aligned}$$

I differenziali delle funzioni $f \in \mathfrak{F}(J^2(Y))$ si possono scomporre come segue

$$df = \partial_\alpha(f) dx^\alpha + \partial_i(f) dz^i + \partial^\nu_i(f) dz^i_\nu + \partial^{\alpha\beta}_i(f) dz^i_{\alpha\beta}$$

$$
\begin{aligned}
&= \left(\partial_\alpha(f) + \partial_i(f) z^i_\alpha + \partial_i^\nu(f) z^i_{\nu\alpha}\right) dx^\alpha + \partial_i(f)\underline{\boldsymbol{\omega}}^i + \partial_i^\nu(f)\underline{\boldsymbol{\omega}}^i_\nu + \partial_i^{\alpha\beta}(f) dz^i_{\alpha\beta} \\
&= \tilde{D}_\alpha(f) dx^\alpha + \partial_i(f)\underline{\boldsymbol{\omega}}^i + \partial_i^\nu(f)\underline{\boldsymbol{\omega}}^i_\nu + \partial_i^{\alpha\beta}(f) dz^i_{\alpha\beta}
\end{aligned}
$$

Per prima cosa proviamo a vedere cosa implica la condizione $\pounds_{\Xi^{(2)}}(\underline{\boldsymbol{\omega}}^r_\nu) \in \mathcal{K}^1(J^2(Y))$

$$
\begin{aligned}
\tilde{D}_\alpha(\xi^r_\nu) - z^r_{\sigma\nu}\tilde{D}_\alpha(\xi^\sigma) - \xi^r_{\alpha\nu} &= 0 && (9) \\
\partial_i^{\alpha\beta}(\xi^r_\nu) - z^r_{\sigma\nu}\partial_i^{\alpha\beta}(\xi^\sigma) &= && (10) \\
\partial_i^{\alpha\beta}(\bar{\xi}^r_\nu + z^r_{\sigma\nu}\xi^\sigma) - z^r_{\sigma\nu}\partial_i^{\alpha\beta}(\xi^\sigma) &= && \\
\partial_i^{\alpha\beta}(\bar{\xi}^r_\nu) + \xi^\sigma\delta^r_i\delta^{(\alpha}_\sigma\delta^{\beta)}_\nu &= 0 && (11)
\end{aligned}
$$

Procedendo in maniera analoga con quanto fatto per $k = 1$, dalla (9) si ottiene

$$
\xi^r_{\alpha\nu} = \tilde{D}_\alpha(\xi^r_\nu) - z^r_{\sigma\nu}\tilde{D}_\alpha(\xi^\sigma) = \tilde{D}_\alpha(\xi^r_\nu - z^r_{\sigma\nu}\xi^\sigma) = \tilde{D}_\alpha(\bar{\xi}^r_\nu)\,.
$$

verificando che, alla fine dei calcoli, sia $\tilde{D}_\alpha(\bar{\xi}^r_\nu) = \tilde{D}_\nu(\bar{\xi}^r_\alpha)$.

Derivando la (11) si ottiene

$$
\partial_j^{\lambda\mu}\partial_i^{\alpha\beta}(\bar{\xi}^r_\nu) - \partial_j^{\lambda\mu}(\xi^\sigma)\delta^r_i\delta^{(\alpha}_\sigma\delta^{\beta)}_\nu = 0
$$

e, poi, si ha la condizione necessaria

$$
\partial_i^{\alpha\beta}(\xi^\sigma)\delta^r_j\delta^{(\lambda}_\sigma\delta^{\mu)}_\nu - \partial_j^{\lambda\mu}(\xi^\sigma)\delta^r_i\delta^{(\alpha}_\sigma\delta^{\beta)}_\nu = 0
$$

Calcolando la traccia $(r = j)$ si ha l'ulteriore condizione necessaria

$$n\,\partial_i^{\alpha\beta}(\xi^\sigma)\delta_\sigma^{(\lambda}\delta_\nu^{\mu)} - \partial_i^{\lambda\mu}(\xi^\sigma)\delta_\sigma^{(\alpha}\delta_\nu^{\beta)} = 0$$

da cui si deducono la condizione necessaria

$$n\,\partial_i^{\alpha\beta}(\xi^{(\lambda})\delta_\nu^{\mu)} - \partial_i^{\lambda\mu}(\xi^{(\alpha})\delta_\nu^{\beta)} = 0$$

e, moltiplicando per 2, la condizione necessaria

$$n\,\partial_i^{\alpha\beta}(\xi^\lambda)\delta_\nu^\mu + n\,\partial_i^{\alpha\beta}(\xi^\mu)\delta_\nu^\lambda - \partial_i^{\lambda\mu}(\xi^\alpha)\delta_\nu^\beta - \partial_i^{\lambda\mu}(\xi^\beta)\delta_\nu^\alpha = 0\,.$$

Calcolando la traccia $(\mu = \nu)$ si ha la condizione necessaria

$$n\,(m+1)\,\partial_i^{\alpha\beta}(\xi^\lambda) - \partial_i^{\lambda\beta}(\xi^\alpha) - \partial_i^{\lambda\alpha}(\xi^\beta) = 0, \tag{12}$$

le condizioni necessarie

$$n\,(m+1)\,\partial_i^{(\alpha\beta}(\xi^{\lambda)}) - 2\,\partial_i^{(\lambda\beta}(\xi^{\alpha)}) = 0$$

$$(n\,m + n - 2)\,\partial_i^{(\alpha\beta}(\xi^{\lambda)}) = 0$$

e, quindi, sostituendo nelle (12) si ottiene

$$(n\,m + n + 1)\,\partial_i^{\alpha\beta}(\xi^\lambda) = 0$$

Cioè: $\xi^\lambda \in \mathfrak{F}(J^1(Z))$ che inserito nella (10) ci dice che anche $\xi^r_\nu \in \mathfrak{F}(J^1(Z))$

Per quanto riguarda la condizione $\pounds_{\underline{\Xi}}(\underline{\boldsymbol{\omega}}^r) \in \mathcal{K}^1(J^2(Y))$ si ha

$$\begin{aligned}
\pounds_{\underline{\Xi}}(\underline{\boldsymbol{\omega}}^r) &= d\xi^r - z^r_\sigma d\xi^\sigma - \xi^r_\sigma dx^\sigma \\
&= \tilde{D}_\alpha(\xi^r)dx^\alpha + \partial_i(\xi^r)\underline{\boldsymbol{\omega}}^i + \partial^\alpha_i(\xi^r)\underline{\boldsymbol{\omega}}^i_\alpha + \partial^{\alpha\beta}_i(\xi^r)dz^i_{\alpha\beta} \\
&\quad -z^r_\sigma\left(\tilde{D}_\alpha(\xi^\sigma)dx^\alpha + \partial_i(\xi^\sigma)\underline{\boldsymbol{\omega}}^i + \partial^\alpha_i(\xi^\sigma)\underline{\boldsymbol{\omega}}^i_\alpha\right) - \xi^r_\alpha dx^\alpha \\
&= \left(\tilde{D}_\alpha(\xi^r) - z^r_\sigma\tilde{D}_\alpha(\xi^\sigma) - \xi^r_\alpha\right)dx^\alpha + \partial^{\alpha\beta}_i(\xi^r)dz^i_{\alpha\beta} \\
&\quad + \left(\partial_i(\xi^r) - z^r_\sigma\partial_i(\xi^\sigma)\right)\underline{\boldsymbol{\omega}}^i + \left(\partial^\alpha_i(\xi^r) - z^r_\sigma\partial^\alpha_i(\xi^\sigma)\right)\underline{\boldsymbol{\omega}}^i_\alpha
\end{aligned}$$

da cui si deduce che deve essere

$$\partial^{\alpha\beta}_i(\xi^r) = 0 \tag{13}$$

$$\tilde{D}_\alpha(\xi^r) - z^r_\sigma\tilde{D}_\alpha(\xi^\sigma) - \xi^r_\alpha = 0 \tag{14}$$

La (13) ci dice che anche i coefficienti ξ^r non dipendono dalle coordinate $z^i_{\alpha\beta}$ e, quindi, si ha che $\xi^\alpha, \xi^i, \xi^r_\alpha \in \mathfrak{F}(J^1(Z))$.

L'equazione (14) diventa

$$d_\alpha(\xi^r) - z^r_\sigma d_\alpha(\xi^\sigma) - \xi^r_\alpha = 0$$

e si deduce che

$$\partial^{\mu\nu}_j(d_\alpha(\xi^r)) - z^r_\sigma\partial^{\mu\nu}_j(d_\alpha(\xi^\sigma)) = 0$$

Per una funzione $f \in \mathfrak{F}(J^1(Z))$ si ha

$$\partial_j^{\mu\nu}(d_\alpha(f)) = \partial_j^{\mu\nu}(\partial_i^\beta(f) z^i_{\beta\alpha}) = \partial_j^\beta(f)\delta_\beta^{(\mu}\delta_\alpha^{\nu)} = \frac{1}{2}\left(\partial_j^\mu(f)\delta_\alpha^\nu + \partial_j^\nu(f)\delta_\alpha^\mu\right)$$

Si deduce, quindi, che deve valere l'identità

$$\begin{aligned} 2\,\partial_j^{\mu\nu}(d_\alpha(\xi^r)) - z^r_\sigma 2\,\partial_j^{\mu\nu}(d_\alpha(\xi^\sigma)) &= \\ \partial_j^\mu(\xi^r)\delta_\alpha^\nu + \partial_j^\nu(\xi^r)\delta_\alpha^\mu - z^r_\sigma\left(\partial_j^\mu(\xi^\sigma)\delta_\alpha^\nu + \partial_j^\nu(\xi^\sigma)\delta_\alpha^\mu\right) &= 0 \end{aligned} \tag{15}$$

e, calcolando la traccia, si deduce che deve essere

$$(m+1)\left(\partial_j^\nu(\xi^r) - z^r_\sigma\partial_j^\nu(\xi^\sigma)\right) = 0$$

o, equivalentemente,

$$\partial_j^\nu(\xi^r) - z^r_\sigma\partial_j^\nu(\xi^\sigma) = \partial_j^\nu(\bar\xi^r) + \delta_j^r\xi^\nu = 0\,.$$

Ma questa è l'equazione (7) e si risolve allo stesso modo dimostrando che la (8) è vera. Come nel caso precedente scriveremo $\vec{\Xi} = J^0(\vec{\Xi}) = \vec{\Xi}^{(0)}$, $J^1(\vec{\Xi}) = \vec{\Xi}^{(1)}$ e $J^2(\vec{\Xi}) = \vec{\Xi}^{(2)}$ sarà il prolungamento del second'ordine del campo $\vec{\Xi}$.

Si può procedere e definire $J^k(\vec{\Xi})$, per $k > 2$, e continuare fino all'infinito

$$J^\infty(\vec{\Xi}) = \xi^\alpha d_\alpha + \bar\xi^s\vec\partial_s + d_\lambda\bar\xi^s\vec\partial_s^\lambda + d_\rho d_\lambda\bar\xi^s\vec\partial_s^{\lambda\rho} + \ldots + d_{\rho_k}\cdots d_{\rho_1}\bar\xi^s\vec\partial_s^{\rho_1\ldots\rho_k} + \ldots +$$

dove, come al solito, $\bar{\xi}^s = \xi^s - z^s_\nu \xi^\nu$. Non ci sono problemi a calcolare $J^\infty(\vec{\Xi})(f)$ per una funzione $f \in \mathfrak{F}(J^\infty(Z))$ perché esiste sempre un numero $k \in \mathbb{N}$ tale che tutte le derivate $\vec{\partial}_s^{\rho_1 \dots \rho_r}(f)$ si annullano per tutti gli $r \in \mathbb{N}$ tali che $r > k$.

3.3 Prolungamenti di funzioni fra varietà fibrate

Consideriamo due varietà differenziabili M ed N fra loro diffeomorfe e due varietà fibrate $\zeta : Z \longrightarrow M$ e $\varsigma : S \longrightarrow N$. Data una funzione $\Phi : J^1(Z) \longrightarrow J^1(S)$ vogliamo sapere se $\Phi^* \left(\boldsymbol{\mathcal{K}}^1(J^1(S)) \right) \subseteq \boldsymbol{\mathcal{K}}^1(J^1(Z))$. Rappresentando la funzione Φ attraverso due sistemi di coordinate fibrate naturali $(x^\alpha, z^i, z^i_\alpha)$ e $(\bar{x}^{\bar{\alpha}}, s^A, s^A_{\bar{\alpha}})$ avremo

$$\begin{aligned} \bar{x}^{\bar{\alpha}} &= \bar{\varphi}^{\bar{\alpha}}(x^\alpha, z^i, z^i_\alpha) \\ s^A &= \bar{F}^A(x^\alpha, z^i, z^i_\alpha) \\ s^A_{\bar{\alpha}} &= \bar{\Phi}^A_{\bar{\alpha}}(x^\alpha, z^i, z^i_\alpha) \end{aligned}$$

e, quindi,

$$\begin{aligned} \Phi^*(ds^A - s^A_{\bar{\alpha}} d\bar{x}^{\bar{\alpha}}) &= d\bar{F}^A - \bar{\Phi}^A_{\bar{\alpha}} d\bar{\varphi}^{\bar{\alpha}} \\ &= \left(D_\alpha \bar{F}^A - \bar{F}^A_{\bar{\alpha}} D_\alpha \bar{\varphi}^{\bar{\alpha}} \right) dx^\alpha + \left(\partial_i \bar{F}^A - \bar{\Phi}^A_{\bar{\alpha}} \partial_i \bar{\varphi}^{\bar{\alpha}} \right) \underline{\boldsymbol{\omega}}^i \\ &\quad + \left(\partial^\alpha_i \bar{F}^A - \bar{\Phi}^A_{\bar{\alpha}} \partial^\alpha_i \bar{\varphi}^{\bar{\alpha}} \right) dz^i_\alpha \end{aligned}$$

Le equazioni da risolvere saranno

$$
\begin{aligned}
D_\alpha \bar{F}^A - \bar{\Phi}^A_{\bar{\alpha}} D_\alpha \bar{\varphi}^{\bar{\alpha}} &= 0 \\
\partial^\alpha_i \bar{F}^A - \bar{\Phi}^A_{\bar{\alpha}} \partial^\alpha_i \bar{\varphi}^{\bar{\alpha}} &= 0
\end{aligned}
$$

Osservazione 3.4. [Prolungamenti di funzioni e di morfismi]

Se $\partial^\alpha_i \bar{\varphi}^{\bar{\alpha}} \equiv 0$ allora anche $\partial^\alpha_i \bar{F}^A \equiv 0$ ed esiste una funzione $F : Z \longrightarrow S$ tale che il seguente diagramma

$$
\begin{tikzcd}
J^1(Z) \arrow[r, "\Phi"] \arrow[d, "\zeta^1_0"] & J^1(S) \arrow[d, "\varsigma^1_0"'] \\
Z \arrow[r, "F"'] & S
\end{tikzcd}
$$

sia commutativo. In questo caso si ha $d_\alpha \bar{F}^A - \bar{\Phi}^A_{\bar{\alpha}} d_\alpha \bar{\varphi}^{\bar{\alpha}} = 0$.

Se, poi, anche $\partial_i \bar{\varphi}^{\bar{\alpha}} \equiv 0$ allora esiste una funzione $\varphi : M \longrightarrow N$ che rende commutativo il diagramma

$$\begin{tikzcd} Z \arrow[r, "F"] \arrow[d, "\zeta"] & S \arrow[d, "\varsigma"'] \\ M \arrow[r, "\varphi"'] & N \end{tikzcd}$$

e si ha $d_\alpha \bar{F}^A - \bar{\Phi}^A_{\bar{\alpha}} \partial_\alpha \bar{\varphi}^{\bar{\alpha}} = 0$.

Se, infine, la funzione φ è un diffeomorfismo $(\det(\partial_\alpha \bar{\varphi}^{\bar{\alpha}}) \neq 0)$, allora ogni sezione γ della varietà fibrata $\zeta : Z \longrightarrow M$ ammette un'immagine $\bar{\gamma} = F_*(\gamma) = F \circ \gamma \circ \varphi^{-1}$ che è una sezione della varietà fibrata $\varsigma : S \longrightarrow N$ e si ha $\Phi_*(j^1(\gamma)) = j^1(\bar{\gamma})$. Il diagramma

$$\begin{tikzcd}
J^1(Z) \arrow[r, "\Phi"] \arrow[d, "\zeta^1_0"] & J^1(S) \arrow[d, "\varsigma^1_0"'] \\
Z \arrow[r, "F"] \arrow[d, "\zeta"] & S \arrow[d, "\varsigma"'] \\
M \arrow[r, "\varphi"'] \arrow[u, bend left, "\gamma"] \arrow[uu, bend left=60, "j^1(\gamma)"] & N \arrow[u, bend right, "\bar{\gamma}"'] \arrow[uu, bend right=60, "j^1(\bar{\gamma})"']
\end{tikzcd}$$

è commutativo. Il morfismo Φ viene indicato con J^1F e viene detto *prolungamento del prim'ordine* del morfismo F. Se F è un diffeomorfismo (e, quindi, un isomorfismo di fibrati) allora anche J^1F lo è.

Si può procedere e per ogni $k > 1$ definire il *prolungamento di ordine* k $J^kF : J^kZ \longrightarrow J^kS$ come il morfismo di varietà fibrate tale che per ogni sezione $\gamma : M \longrightarrow Z$ si abbia

$$(J^kF)_*(j^k(\gamma)) = (J^kF) \circ j^k(\gamma) \circ \varphi^{-1} = j^k(F \circ \gamma \circ \varphi^{-1}) = j^k(F_*(\gamma))$$

o, equivalentemente,

$$(J^kF)(j^k_x(\gamma)) = j^k_{\gamma(x)}(F) \bullet j^k_x(\gamma) \bullet j^k_{\varphi(x)}(\varphi^{-1}) = j^k_{\gamma(x)}(F) \bullet j^k_x(\gamma) \bullet (j^k_x(\varphi))^{-1}$$

Esempio 3.6. [Prolungamenti di fibrati vettoriali]

Dato un fibrato vettoriale $\zeta : Z \longrightarrow M$ allora il fibrato $\zeta^1 : J^1(Z) \longrightarrow M$ ha una struttura naturale di fibrato vettoriale.

Per dimostrare questa affermazione, consideriamo due aperti $U_1 \subseteq M$ e $U_2 \subseteq M$, con intersezione non vuota $U_{12} = U_1 \cap U_2 \neq \emptyset$, su cui esistono trivializzazioni locali $\psi_1 : \zeta^{-1}(U_1) \longrightarrow U_1 \times \mathbb{R}^n$ e $\psi_2 : \zeta^{-1}(U_2) \longrightarrow U_2 \times \mathbb{R}^n$. Allora le due funzioni di transizione sono

$$\begin{array}{rcccc} \psi_{21} & : & U_{12} \times \mathbb{R}^n & \longrightarrow & U_{12} \times \mathbb{R}^n \\ & & (p, z_1) & \longmapsto & (p, A_{21}(p)(z_1)) \end{array}$$

e

$$\begin{array}{rcccc} \psi_{12} & : & U_{12} \times \mathbb{R}^n & \longrightarrow & U_{12} \times \mathbb{R}^n \\ & & (p, z_2) & \longmapsto & (p, A_{12}(p)(z_2)) \end{array}$$

con funzioni $A_{21} : p \longmapsto A_{21}(p)$ e $A_{12} : p \longmapsto A_{12}(p)$ che sono elementi di $\mathcal{C}^\infty(U_{12}; GL(n; \mathbb{R}))$.

Se gli aperti U_1 e U_2 sono abbastanza piccoli da essere domini di due carte $\mathfrak{c}_1 = (U_1, \varphi_1)$ e $\mathfrak{c}_2 = (U_2, \varphi_2)$ della varietà M, allora le due funzioni $\tilde{\psi}_1 = (\varphi_1 \times \mathrm{id}_{\mathbb{R}^n}) \circ \psi_1 : \zeta^{-1}(U_1) \longrightarrow \varphi_1(U_1) \times \mathbb{R}^n$ e $\tilde{\psi}_2 = (\varphi_2 \times \mathrm{id}_{\mathbb{R}^n}) \circ \psi_2 : \zeta^{-1}(U_2) \longrightarrow \varphi_2(U_2) \times \mathbb{R}^n$ sono dei sistemi di coordinate fibrate su Z che compatibili con la struttura di fibrato vettoriale. Le trasformazioni di coordinate fibrate sono

$$\begin{array}{rcccc} \tilde{\psi}_{21} & : & \varphi_1(U_{12}) \times \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \varphi_2(U_{12}) \times \mathbb{R}^n \\ & & (x^\alpha, z^i) & \longmapsto & (f^{\alpha'}(x), A^{i'}_r(x) z^r) \\ \tilde{\psi}_{12} & : & \varphi_2(U_{12}) \times \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \varphi_1(U_{12}) \times \mathbb{R}^n \\ & & (x^{\alpha'}, z'^{i'}) & \longmapsto & (\bar{f}^\alpha(x'), \bar{A}^i_{r'}(x') z'^{r'}) \end{array}$$

con $f(\bar{f}(x')) \equiv x'$, $\bar{f}(f(x)) \equiv x$, $A^{i'}_r(x)\bar{A}^r_{j'}(f(x)) \equiv \delta^{i'}_{j'}$ e $\bar{A}^i_{r'}(x')A^{r'}_j(\bar{f}(x')) \equiv \delta^i_j$.

Gli isomorfismi di fibrati vettoriali $\tilde{\psi}_1$ e $\tilde{\psi}_2$ possono essere prolungati ad isomorfismi di fibrati

$$\begin{array}{rcccc} J^1(\tilde{\psi}_1) & : & (\zeta^1)^{-1}(U_1) & \longrightarrow & J^1(\varphi_1(U_1); \mathbb{R}^n) \\ J^1(\tilde{\psi}_2) & : & (\zeta^1)^{-1}(U_2) & \longrightarrow & J^1(\varphi_2(U_2); \mathbb{R}^n) \end{array}$$

che sono sistemi di coordinate fibrate su $J^1(Z)$.

La trasformazione di coordinate fibrate

$$J^1(\tilde{\psi}_2) \circ (J^1(\tilde{\psi}_1))^{-1} = J^1(\tilde{\psi}_{21}) : J^1(\varphi_1(U_{12}); \mathbb{R}^n) \longrightarrow J^1(\varphi_2(U_{12}); \mathbb{R}^n)$$

è definita da

$$(x^\alpha, z^i, z^i_\alpha) \longmapsto \Big(f^{\alpha'}(x), A^{i'}_r(x) z^r, A^{i'}_{r\alpha'}(x) z^r + A^{i'}_r(x) z^r_\alpha \bar{X}^\alpha_{\alpha'}(x) \Big) \tag{16}$$

dove si è posto

$$\bar{X}^\alpha_{\alpha'}(x) = \frac{\partial \bar{f}^\alpha}{\partial x'^{\alpha'}}(f(x)) \qquad \text{e} \qquad A^{i'}_{r\alpha'}(x) = \partial_\alpha A^{i'}_r(x) \bar{X}^\alpha_{\alpha'}(x)$$

La trasformazione di coordinate fibrate

$$J^1(\tilde{\psi}_1) \circ (J^1(\tilde{\psi}_2))^{-1} = J^1(\tilde{\psi}_{12}) : J^1(\varphi_2(U_{12}); \mathbb{R}^n) \longrightarrow J^1(\varphi_1(U_{12}); \mathbb{R}^n)$$

è definita da

$$(x'^{\alpha'}, z'^{i'}, z'^{i'}_{\alpha'}) \longmapsto \Big(\bar{f}^{\alpha}(x'), \bar{A}^i_{r'}(x')z'^{r'}, \bar{A}^i_{r'\alpha}(x')z'^{r'} + \bar{A}^i_{r'}(x')z'^{r'}_{\alpha'}X^{\alpha'}_{\alpha}(x')\Big) \tag{17}$$

dove si è posto

$$X^{\alpha'}_{\alpha}(x') = \frac{\partial f^{\alpha'}}{\partial x^{\alpha}}(\bar{f}(x')) \qquad \text{e} \qquad \bar{A}^i_{r'\alpha}(x') = \partial'_{\alpha'}\bar{A}^i_{r'}(x')X^{\alpha'}_{\alpha}(x')$$

Le trasformazioni di coordinate fibrate (16) sono lineari nelle coordinate (v^i, v^i_α) e le trasformazioni di coordinate fibrate (17) sono lineari nelle coordinate $(v'^{i'}, v'^{i'}_{\alpha'})$. Questo ci assicura che $\zeta^1 : J^1(Z) \longrightarrow M$ possiede una struttura di fibrato vettoriale, con fibra tipo

$$T^1_m(\mathbb{R}^n) = J^1_0(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n) = \mathbb{R}^n \oplus S_1(\mathbb{R}^m; \mathbb{R}^n) = \mathbb{R}^n \oplus (\mathbb{R}^n \otimes (\mathbb{R}^m)^*) \ ,$$

indotta da quella del fibrato vettoriale $\zeta : Z \longrightarrow M$.

Infine, il fibrato $\zeta^1_0 : J^1(Z) \longrightarrow Z$ ha una struttura di fibrato affine.

Esempio 3.7. [Prolungamenti di fibrati affini]

Dato un fibrato affine $\zeta : Z \longrightarrow M$ allora il fibrato $\zeta^1 : J^1(Z) \longrightarrow M$ ha una struttura naturale di fibrato affine.

La trasformazione $\tilde{\psi}_{21}$ di coordinate fibrate è del tipo

$$\tilde{\psi}_{21} : (x^\alpha, z^i) \longmapsto (f^{\alpha'}(x), A^{i'}_r(x) z^r + B^{i'}(x))$$

mentre la trasformazione di coordinate $J^1(\tilde{\psi}_{21})$ è definita da

$$(x^\alpha, z^i, z^i_\alpha) \longmapsto \Big(f^{\alpha'}(x), A^{i'}_r(x) z^r + B^{i'}(x), A^{i'}_{r\alpha'}(x) z^r + A^{i'}_r(x) z^r_\alpha \bar{X}^\alpha_{\alpha'}(x) + B^{i'}_{\alpha'}(x)\Big) \tag{18}$$

dove si è posto

$$B^{i'}_{\alpha'}(x) = \partial_\alpha B^{i'}(x) \bar{X}^\alpha_{\alpha'}(x)$$

Le trasformazioni di coordinate fibrate (18) sono affini nelle coordinate (z^i, z^i_α) e questo ci assicura che $\zeta^1 : J^1(Z) \longrightarrow M$ possiede una struttura di fibrato affine, con fibra tipo

$$T^1_m(\mathbb{R}^n) = J^1_0(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n) = \mathbb{R}^n \oplus S_1(\mathbb{R}^m; \mathbb{R}^n) = \mathbb{R}^n \oplus (\mathbb{R}^n \otimes (\mathbb{R}^m)^*) \ ,$$

indotta da quella del fibrato affine $\zeta : Z \longrightarrow M$ ed il fibrato $\zeta^1_0 : J^1(Z) \longrightarrow Z$ ha una struttura di fibrato affine.

Osservazione 3.5. [Connessioni lineari su varietà]
Il fibrato $L(M)$ delle basi (ordinate) degli spazi tangenti di una varietà M è il sottofibrato aperto e denso del prodotto cartesiano fibrato

$$T(M) \times_M \cdots \times_M T(M)$$

costituito dalle m-uple di vettori $(\vec{\boldsymbol{e}}_1, \dots, \vec{\boldsymbol{e}}_m) \in (T_x(M))^m$, con $x \in M$, tali che $\vec{\boldsymbol{e}}_1 \wedge \cdots \wedge \vec{\boldsymbol{e}}_m \neq 0$.

Il gruppo di Lie $GL(m;\mathbb{R})$ agisce naturalmente a destra su $L(M)$ con l'azione

$$((\vec{\boldsymbol{e}}_1, \dots, \vec{\boldsymbol{e}}_m), (g^r_s)) \longmapsto (\vec{\boldsymbol{e}}_r g^r_1, \dots, \vec{\boldsymbol{e}}_r g^r_m)$$

Usando le coordinate naturali (x^α, e^α_i) su $L(M)$ l'azione è rappresentata dalla funzione

$$((x^\alpha, e^\alpha_i), (g^r_s)) \longmapsto (x^\alpha, e^\alpha_r g^r_i)$$

ed è prolungabile ad un azione a destra di $GL(m;\mathbb{R})$ su $J^1(L(M))$ che, in coordinate fibrate naturali su $J^1(L(M))$, è rappresentata da

$$((x^\alpha, e^\alpha_i, e^\alpha_{i\sigma}), (g^r_s)) \longmapsto (x^\alpha, e^\alpha_r g^r_i, e^\alpha_{r\sigma} g^r_i) \tag{19}$$

Ricordiamo che la matrice (e^α_i) è invertibile con matrice inversa $(\bar{e}^j_\beta)$. I coefficienti $\bar{e}^j_\beta$ sono definiti implicitamente dalle identità

$$e^\alpha_r \bar{e}^r_\beta = \delta^\alpha_\beta \qquad \text{o, equivalentemente,} \qquad \bar{e}^j_\sigma e^\sigma_i = \delta^j_i \, .$$

In termini generali, l'isomorfismo verticale di fibrati $\bar{R}_g : L(M) \longrightarrow L(M)$ viene prolungato ad un'azione a destra indotta dall'isomorfismo verticale di fibrati $J^1(\bar{R}_g) : J^1(L(M)) \longrightarrow J^1(L(M))$.

L'azione (19) è un'azione da fibrato principale con varietà quoziente $C(M)$ che è un fibrato affine su M. Per dimostrare questa affermazione, facciamo un cambiamento di coordinate su $J^1(L(M))$

passando dalle coordinate $(x^\alpha, e^\alpha_i, e^\alpha_{i\mu})$ a nuove coordinate $(x^\alpha, e^\alpha_i, \gamma^\alpha_{\beta\mu})$ definite da:

$$\gamma^\alpha_{\beta\mu} = -e^\alpha_{r\mu}\bar{e}^r_\beta$$

con trasformazione inversa

$$e^\alpha_{i\mu} = -\gamma^\alpha_{\beta\mu}e^\beta_i$$

Usando le coordinate $(x^\alpha, e^\alpha_i, \gamma^\alpha_{\beta\mu})$, la moltiplicazione a destra $J^1(\bar{R}_g)$ induce l'azione

$$((x^\alpha, e^\alpha_i, \gamma^\alpha_{\beta\mu}), (g^r_s)) \longmapsto (x^\alpha, e^\alpha_r g^r_i, \gamma^\alpha_{\beta\mu})$$

è evidente che che la varietà quoziente $C(M)$ esiste e che è un fibrato su M, con coordinate fibrate naturali $(x^\alpha, \gamma^\alpha_{\beta\mu})$. Una trasformazione di coordinate su M induce una trasformazione di coordinate fibrate naturali su $C(M)$

$$(x^\alpha, \gamma^\alpha_{\beta\mu}) \longmapsto \Big(x'^{\alpha'} = x'^{\alpha'}(x), \gamma^{\alpha'}_{\beta'\mu'} = X'^{\alpha'}_\alpha(x)\gamma^\alpha_{\beta\mu}X^\beta_{\beta'}(x)X^\mu_{\mu'}(x) + X'^{\alpha'}_{\beta'\mu'}(x)\Big) \tag{20}$$

dove si è posto

$$X'^{\alpha'}_\alpha(x) = \frac{\partial x'^{\alpha'}}{\partial x^\alpha}(x)\ ,\ X^\alpha_{\alpha'}(x) = \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^{\alpha'}}(x'(x))$$

e

$$X'^{\alpha'}_{\beta'\mu'}(x) = X'^{\alpha'}_\alpha(x)\frac{\partial^2 x^\alpha}{\partial x'^{\beta'}\partial x'^{\mu'}}(x'(x)) = -\frac{\partial^2 x'^{\alpha'}}{\partial x^\beta \partial x^\mu}(x)X^\beta_{\beta'}(x)X^\mu_{\mu'}(x)$$

Le trasformazioni di coordinate del tipo (20) è la stessa dei coefficienti $\Gamma^\alpha_{\beta\mu}$ di una connessione lineare su $T(M)$, si veda [11], e ci assicurano che $C(M)$ è un fibrato affine su M, modellato sul fibrato vettoriale $T^1_2(M)$. Possiamo quindi affermare che le sezioni globali del fibrato affine $C(M) \longrightarrow M$ sono le connessioni lineari sulla varietà M.

FINE LEZIONE 20 MMdFC (2023-05-12 ore 11:00 – 13:00)

Riferimenti bibliografici

[1] S. Kobayashi, K. Nomizu: *Foundations of Differential Geometry, Vol. I*; John Wiley & Sons, New York · Chichester · Brisbane · Toronto · Singapore, 1963.

[2] S. Kobayashi, K. Nomizu: *Foundations of Differential Geometry, Vol. II*; John Wiley & Sons, New York · Chichester · Brisbane · Toronto, 1969.

[3] J. Dieudonné: *Éléments d'analyse 1 / Fondements de l'analyse moderne*; Gauthier–Villars, Paris, 1969.

[4] J. Dieudonné: *Éléments d'analyse 3*; Gauthier–Villars, Paris, 1969.

[5] P.L. García–Pérez: *Connections and* 1*–jet Fiber Bundles*, Rend. Sem. Mat. Univ. Padova **47**, 227–242 (1972).

[6] I. Kolář, P.W. Michor, J. Slovák: *Natural Operations in Differential Geometry*, Springer–Verlag, Berlin Heidelberg 1993.

[7] P.J. Olver: *Equivalence, Invariants and Symmetry*; Cambridge University Press, 1995.

[8] J. E. Marsden, T. Ratiu, R. Abraham: *Manifolds, tensor analysis and applications, Third Edition*; Springer–Verlag, 2001.

[9] M. Ferraris: *Appunti di agebra lineare, multilineare e tensori*; 2023.

[10] M. Ferraris: *Appunti di calcolo differenziale*; 2023.

[11] M. Ferraris: *Appunti di calcolo sulle varietà differenziabili*; 2023.

[12] M. Ferraris: *Appunti sui gruppi di Lie*; 2023.