Osservazione 3.6. [Connessioni principali]

Una connessione principale su un fibrato principale $\pi : P \longrightarrow M$, con gruppo di struttura G, è una connessione sulla varietà fibrata P se il sottofibrato vettoriale $H \subset T(P)$, dei vettori orizzontali per la connessione, è invariante per moltiplicazione a destra:

$$\forall g \in G \quad T(\bar{R}_g)(H) = H \qquad \Longleftrightarrow \qquad \forall p \in P \ \wedge \ \forall g \in G \quad T(\bar{R}_g)(H_p) = H_{p\cdot g}$$

Sfruttando le trivializzazioni locali $\psi : \pi^{-1}(U) \longrightarrow U \times G$ del fibrato principale P, sopra aperti $U \subseteq M$ che sono domini di sistemi di coordinate (x^α), possiamo rappresentare le basi per gli spazi H_p dei vettori orizzontali di una connessione principale con espressioni del tipo

$$\vec{D}_\alpha = \partial_\alpha - \Gamma^i_\alpha(x,g)\partial_i = \partial_\alpha - A^i_\alpha(x)\vec{\rho}_i(g)$$

dove i campi $\vec{\rho}_i \in \mathfrak{X}_{_R}(G)$ sono una base per i campi di vettori invarianti per moltiplicazione a destra. Se il fibrato principale P non è isomorfo al fibrato banale $M \times G$ (cioè: se non ammette sezioni globali di classe $\mathcal{C}^\infty$) i campi di vettori $\vec{\rho}_i(g)$ sono definiti solo sull'aperto $\pi^{-1}(U)$ dove è definita la trivializzazione e dipendono esplicitamente da essa.

Per quanto riguarda la curvatura della connessione, si ha:

$$\begin{aligned}\left[\vec{D}_\alpha, \vec{D}_\beta\right] &= \left(-\vec{D}_\alpha(A^k_\beta) + \vec{D}_\beta(A^k_\alpha)\right)\vec{\rho}_k + A^r_\alpha A^s_\beta\left[\vec{\rho}_r, \vec{\rho}_s\right] \\ &= \left(-\partial_\alpha(A^k_\beta) + \partial_\beta(A^k_\alpha) - A^r_\alpha A^s_\beta c^k_{rs}\right)\vec{\rho}_k\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= -\left(\partial_\alpha(A^k_\beta) - \partial_\beta(A^k_\alpha) + A^r_\alpha A^s_\beta c^k_{rs}\right)\vec{\rho}_k \\
&= -F^k_{\alpha\beta}(x)\vec{\rho}_k
\end{aligned}
$$

Le moltiplicazioni a destra $\bar{R}_g : P \longrightarrow P$, che sono isomorfismi verticali del fibrato P, si possono prolungare a $J^1(\bar{R}_g) : J^1(P) \longrightarrow J^1(P)$ fornendo le moltiplicazioni a destra per un'azione a destra $J^1(P) \times G \longrightarrow J^1(P)$. In analogia con quanto visto per $J^1(L(M))$, la varietà delle orbite $C(P) = J^1(P)/G$ esiste ed è un fibrato affine $C(P) \longrightarrow M$. Questo risultato è stato dimostrato nel 1972 dal salmantino P.L. García-Pérez, si veda [5]; i coefficienti $A^i_\alpha(x)$ rappresentano la versione in coordinate di sezioni globali del fibrato affine $C(P) \longrightarrow M$.

3.4 Fibrati delle basi di ordine superiore

Il fibrato $L(M)$ si può vedere come il fibrato $P^1_0(\mathbb{R}^m; M)$, dove $m = \dim(M)$. Il fibrato $P^1_0(\mathbb{R}^m; M)$, che verrà indicato con $L^1(M)$, ha una struttura naturale di fibrato principale con gruppo di struttura G^1_m e con l'azione a destra definita da

$$
\begin{aligned}
\bar{m}^1 \;:\; L^1(M) \times G^1_m &\longrightarrow L^1(M) \\
(j^1_0(\sigma), j^1_0(\gamma)) &\longmapsto j^1_0(\sigma \circ \gamma) = j^1_0(\sigma) \bullet j^1_0(\gamma)
\end{aligned}
$$

Se consideriamo invece il fibrato $L^k(M) = P^k_0(\mathbb{R}^m; M)$, vediamo che esso ha una struttura naturale di fibrato principale, con base M, con gruppo di struttura G^k_m e con l'azione a destra definita da

$$
\begin{array}{rcl}
\bar{m}^k \; : \; L^k(M) \times G^k_m & \longrightarrow & L^k(M) \\
(j^k_0(\sigma), j^k_0(\gamma)) & \longmapsto & j^k_0(\sigma \circ \gamma) = j^k_0(\sigma) \bullet j^k_0(\gamma)
\end{array}
$$

Il fibrato principale $L^k(M)$ viene detto *fibrato delle basi di ordine* k della varietà M ed i fibrati associati al fibrato principale $L^k(M)$ sono detti *fibrati di oggetti geometrici di ordine* $\leq k$ sulla varietà M.

Se consideriamo una funzione $f \in \mathcal{C}^\infty(M; N)$ fra due varietà differenziabili possiamo estendere la funzione f ad una funzione $L^k(f)$ definita da

$$
\begin{array}{rcl}
L^k(f) \; : \; L^k(M) & \longrightarrow & L^k(N) \\
j^k_0(\sigma) & \longmapsto & j^k_0(f \circ \sigma) = j^k_{\sigma(0)}(f) \bullet j^k_0(\sigma)
\end{array}
$$

Se $g \in \mathcal{C}^\infty(N; Q)$ allora si ha $L^k(g \circ f) = L^k(g) \circ L^k(f)$. In particolare si ha $L^k(\mathrm{id}_M) = \mathrm{id}_{L^k(M)}$ e, se f è un diffeomorfismo, anche $L^k(f)$ lo è e si ha $L^k(f^{-1}) = (L^k(f))^{-1}$.

Se consideriamo un gruppo ad un parametro di diffeomorfismi (locali) $\varphi_t \in \mathrm{Diff}(M)$, generato dal flusso di un campo di vettori $\vec{\xi} \in \mathfrak{X}(M)$, allora $L^k(\varphi_t)$ è un gruppo ad un parametro di diffeomorfismi (locali) di $L^k(M)$ che genera un campo di vettori $L^k\big(\vec{\xi}\big) \in \mathfrak{X}(L^k(M))$.

3.4.1 Connessioni lineari su varietà come oggetti del second'ordine

Consideriamo il fibrato $L^2(M)$ delle basi del second'ordine di una varietà M. Il gruppo di Lie G^2_m agisce naturalmente a destra sul fibrato $L^2(M)$ con l'azione

$$\begin{array}{rcl} \bar{m}^2 \;:\; L^2(M) \times G^2_m & \longrightarrow & L^2(M) \\ (j^2_0(\sigma), j^2_0(\gamma)) & \longmapsto & j^2_0(\sigma \circ \gamma) = j^2_0(\sigma) \bullet j^2_0(\gamma) \end{array}$$

che, usando le coordinate naturali $(x^\alpha, e^\alpha_i, e^\alpha_{ij})$ su $L^2(M)$ e le coordinate naturali su G^2_m, è rappresentata dalla funzione

$$\big((x^\alpha, e^\alpha_i, e^\alpha_{ij}), (g^r_s, g^r_{uv})\big) \longmapsto (x^\alpha, e^\alpha_r g^r_i, e^\alpha_r g^r_{uv} + e^\alpha_{rs} g^r_u g^s_v)$$

Indicando con $(h^a_i, h^b_{jk}) = (g^a_i, g^b_{jk})^{-1}$, consideriamo l'azione a sinistra

$$\rho : ((g^r_s, g^r_{uv}), (t^a_{ij})) \longmapsto (t'^{a'}_{b'c'} = g^{a'}_a t^a_{bc} h^b_{b'} h^c_{c'} + g^{a'}_a h^a_{b'c'}) \tag{21}$$

sulla varietà $T^1_2(\mathbb{R}^m)$. L'azione a destra di G^2_m su $L^2(M) \times T^1_2(\mathbb{R}^n)$ sarà definita da

$$(((x^\alpha, e^\alpha_i, e^\alpha_{ij}), (t^a_{ij})), (g^r_s, g^r_{uv})) \longmapsto \Big((x^\alpha, e^\alpha_r g^r_i, e^\alpha_r g^r_{uv} + e^\alpha_{rs} g^r_u g^s_v), (h^{a'}_a t^a_{bc} g^b_{b'} g^c_{c'} + h^{a'}_a g^a_{b'c'})\Big) \tag{22}$$

Per scoprire qual'è la varietà quoziente di questa azione è sufficiente cambiare, come al solito, le coordinate su $L^2(M) \times T^1_2(\mathbb{R}^m)$

$$((x^\mu, e^\alpha_i, e^\beta_{jk}), (t^a_{bc})) \longmapsto (x^\mu, e^\alpha_i, e^\beta_{jk}, \gamma^\alpha_{\beta\sigma})$$

dove si è posto $\gamma^\alpha_{\beta\sigma} = e^\alpha_a t^a_{bc} \vartheta^b_\beta \vartheta^c_\sigma + e^\alpha_a \vartheta^a_{\beta\sigma}$, con $(\vartheta^a_\alpha, \vartheta^a_{\beta\sigma}) = (e^\alpha_i, e^\beta_{jk})^{-1}$.

Con le nuove coordinate $(x^\mu, e^\alpha_i, e^\beta_{jk}, \gamma^\alpha_{\beta\sigma})$ la trasformazione (22) diventa

$$\big(((x^\alpha, e^\alpha_i, e^\alpha_{ij}), (\gamma^\alpha_{\beta\sigma})), (g^r_s, g^r_{uv})\big) \longmapsto \big((x^\alpha, e^\alpha_r g^r_i, e^\alpha_r g^r_{uv} + e^\alpha_{rs} g^r_u g^s_v), (\gamma^\alpha_{\beta\sigma})\big) \tag{23}$$

e lo spazio delle orbite $L^2(M) \times_\rho T^1_2(\mathbb{R}^m) = (L^2(M) \times T^1_2(\mathbb{R}^m))/G^2_m$ può essere parametrizzato dalle coordinate $(x^\alpha, \gamma^\alpha_{\beta\sigma})$. Analizzando le leggi di trasformazione delle coordinate $(x^\alpha, \gamma^\alpha_{\beta\sigma})$ quando cambiamo le coordinate (x^α) su M, scopriamo che coincide con la trasformazione (20). Quindi, $L^2(M) \times_\rho T^1_2(\mathbb{R}^m) \equiv C(M)$ e le connessioni lineari sono oggetti geometrici del second'ordine.

Il sottospazio $S^1_2(\mathbb{R}^m)$ è invariante rispetto all'azione (21) quindi, indicando con $C_s(M)$ il fibrato affine le cui sezioni sono le connessioni simmetriche, si ha $L^2(M) \times_\rho S^1_2(\mathbb{R}^m) = (L^2(M) \times S^1_2(\mathbb{R}^m))/G^2_m \equiv C_s(M)$ e le connessioni lineari simmetriche son oggetti geometrici del second'ordine.

Infine, considerando la traccia

$$\tilde{\rho} : ((g^r_s, g^r_{uv}), (t^a_{aj})) \longmapsto (t'^{a'}_{a'c'} = g^{a'}_a t^a_{bc} h^b_{a'} h^c_{c'} + g^{a'}_a h^a_{a'c'} = t^a_{ac} h^c_{c'} + g^{a'}_a h^a_{a'c'}) \tag{24}$$

dell'azione (21), scopriamo che anche le tracce delle connessioni lineari su varietà sono oggetti geometrici del second'ordine.

Esempio 3.8. [L^1]

Nel caso $k = 1$, possiamo scrivere che se la funzione f è definita da

$$f : (x^\alpha) \longmapsto (y^A) = (f^A(x^\alpha))$$

con mappa tangente $T(f)$ definita da

$$T(f):(x^\alpha,\dot{x}^\beta)\longmapsto(y^A,\dot{y}^B)=(f^A(x^\alpha),\partial_\alpha f^A(x)\dot{x}^\alpha)$$

La funzione $L^1(f)$ è definita

$$L^1(f):(x^\alpha,x^\alpha_i)\longmapsto(y^A,y^A_i)=(f^A(x^\alpha),\partial_\alpha f^A(x)x^\alpha_i)$$

con mappa tangente

$$T(L^1(f)):(x^\alpha,x^\alpha_i,\dot{x}^\alpha,\dot{x}^\alpha_i)\longmapsto(y^A,y^A_i,\dot{y}^A,\dot{y}^A_i)$$

dove

$$\begin{aligned}
y^A &= f^A(x^\alpha)\\
y^A_i &= \partial_\alpha f^A(x)x^\alpha_i\\
\dot{y}^A &= \partial_\alpha f^A(x)\dot{x}^\alpha\\
\dot{y}^A_i &= \partial_\alpha f^A(x)\dot{x}^\alpha_i+\partial_\beta\partial_\alpha f^A(x)\dot{x}^\beta x^\alpha_i
\end{aligned}$$

Un gruppo ad un parametro di diffeomorfismi (locali) φ_t generato da un campo di vettori $\vec{\xi}\in\mathfrak{X}(M)$ rappresentato da:

$$\vec{\xi}:(x^\alpha)\longmapsto(x^\alpha,\xi^\beta(x))$$

genera un campo di vettori $L^1(\vec{\xi})$

$$L^1(\vec{\xi}):(x^\alpha,x^\alpha_i)\longmapsto(x^\alpha,x^\alpha_i,\xi^\beta(x),x^\sigma_i\partial_\sigma\xi^\beta(x)) \tag{25}$$

o, equivalentemente

$$\vec{\xi} = \xi^\beta(x)\vec{\partial}_\beta \longmapsto L^1(\vec{\xi}\,) = \xi^\beta(x)\vec{\partial}_\beta + x_i^\sigma \partial_\sigma \xi^\beta(x)\vec{\partial}_\beta^i \tag{26}$$

La funzione (25) induce un isomorfismo

$$L^1(M) \times_M J^1(T(M)) \longrightarrow T(L^1(M))$$

di fibrati vettoriali su $L^1(M)$ e si dimostra[6] che

$$\left[L^1(\vec{\xi}_1\,), L^1(\vec{\xi}_2\,)\right] = L^1\Big(\left[\vec{\xi}_1, \vec{\xi}_2\right]\Big)$$

e, quindi, la funzione (26), che è iniettiva, è un morfismo iniettivo di algebre di Lie

$$\mathfrak{X}(M) \longrightarrow \mathfrak{X}_{_P}(L^1(M)) \subset \mathfrak{X}(L^1(M))\,.$$

Esempio 3.9. [L^2]

Nel caso $k = 2$, la funzione $L^2(f)$ è definita

$$L^2(f) : (x^\alpha, x_i^\alpha, x_{ij}^\alpha) \longmapsto (y^A, y_i^A, y_{ij}^A) = (f^A(x^\alpha), \partial_\alpha f^A(x)x_i^\alpha, \partial_\beta\partial_\alpha f^A(x)x_j^\beta x_i^\alpha + \partial_\alpha f^A(x)x_{ij}^\alpha)$$

Un gruppo ad un parametro di diffeomorfismi (locali) φ_t generato da un campo di vettori $\vec{\xi} \in \mathfrak{X}(M)$ rappresentato da:

$$\vec{\xi} : (x^\alpha) \longmapsto (x^\alpha, \xi^\beta(x))$$

[6] farlo per esercizio

genera un campo di vettori $L^2(\vec{\xi}\,)$

$$L^2(\vec{\xi}\,) : (x^\alpha, x^\alpha_i, x^\alpha_{ij}) \longmapsto (x^\alpha, x^\alpha_i, x^\alpha_{ij}, \xi^\beta(x), x^\sigma_i \partial_\sigma \xi^\beta(x), x^\nu_j x^\sigma_i \partial_\nu \partial_\sigma \xi^\beta(x) + x^\sigma_{ij} \partial_\sigma \xi^\beta(x)) \qquad (27)$$

o, equivalentemente

$$\vec{\xi} = \xi^\beta(x) \vec{\partial}_\beta \longmapsto L^2(\vec{\xi}\,) = \xi^\beta(x) \vec{\partial}_\beta + x^\sigma_i \partial_\sigma \xi^\beta(x) \vec{\partial}^i_\beta + \left(x^\nu_j x^\sigma_i \partial_\nu \partial_\sigma \xi^\beta(x) + x^\sigma_{ij} \partial_\sigma \xi^\beta(x) \right) \vec{\partial}^{ij}_\beta \qquad (28)$$

La funzione (27) induce un isomorfismo

$$L^2(M) \times_M J^2(T(M)) \longrightarrow T(L^2(M))$$

di fibrati vettoriali su $L^2(M)$ e si dimostra[7] che

$$\left[L^2(\vec{\xi}_1\,), L^2(\vec{\xi}_2\,) \right] = L^2\Big(\left[\vec{\xi}_1, \vec{\xi}_2 \right] \Big)$$

e, quindi, la funzione (28), che è iniettiva, è un morfismo iniettivo di algebre di Lie

$$\mathfrak{X}(M) \longrightarrow \mathfrak{X}_P(L^2(M)) \subset \mathfrak{X}(L^2(M))\,.$$

[7] farlo per esercizio

I campi $L^2(\vec{\xi}\,)$ sono proiettabili sulla base M ed anche su $L^1(\vec{\xi}\,)$. Si ha il seguente diagramma commutativo

$$\begin{tikzcd}
\mathfrak{X}_{_P}(L^2(M)) \arrow[d] \\
\mathfrak{X}_{_P}(L^1(M)) \arrow[d] \\
\mathfrak{X}(M) \arrow[u, bend right, "L^1(\vec{\xi}\,)"'] \arrow[uu, bend left, "L^2(\vec{\xi}\,)"]
\end{tikzcd}$$

Esempio 3.10. [L^k] Si dimostra che i campi $L^k(\vec{\xi})$ passano al quoziente sui fibrati di oggetti geometrici di ordine $\leq k$ che, come sappiamo, sono fibrati associati del tipo $L^k(M) \times_\rho Q$ indotti da un'azione a sinistra

$$\rho : G^k_m \times Q \longrightarrow Q$$

del gruppo G^k_m su una varietà Q.

Esempio 3.11. [Derivata di Lie di connessioni lineari su una varietà]

Il campo di vettori

$$L^2(\vec{\xi}\,) = \xi^\beta(x)\vec{\partial}_\beta + e_i^\sigma\partial_\sigma\xi^\beta(x)\vec{\partial}_\beta^i + \left(e_j^\nu e_i^\sigma\partial_\nu\partial_\sigma\xi^\beta(x) + e_{ij}^\sigma\partial_\sigma\xi^\beta(x)\right)\vec{\partial}_\beta^{ij} \tag{29}$$

passa al quoziente sul fibrato associato $C(M)$ e permette di definire la derivata di Lie di una sezione del fibrato $C(M)$.

Ricordando che

$$\gamma_{\beta\sigma}^\alpha = e_a^\alpha t_{bc}^a \vartheta_\beta^b \vartheta_\sigma^c + e_a^\alpha \vartheta_{\beta\sigma}^a \tag{30}$$

e che

$$\begin{aligned} \vartheta_\alpha^a e_i^\alpha &= \delta_i^a & (31)\\ \vartheta_{\alpha\beta}^a e_i^\alpha e_j^\beta + \vartheta_\alpha^a e_{ij}^\alpha &= 0 & (32)\\ e_k^\omega \vartheta_\beta^k &= \delta_\beta^\omega & (33)\\ e_{ij}^\omega \vartheta_\beta^i \vartheta_\sigma^j + e_k^\omega \vartheta_{\beta\sigma}^k &= 0 & (34) \end{aligned}$$

si ha[8]

$$L^2(\vec{\xi}\,)(\gamma_{\beta\sigma}^\alpha) = -\left(\xi_{\beta\sigma}^\alpha + \gamma_{\kappa\sigma}^\alpha\xi_\beta^\kappa + \gamma_{\beta\kappa}^\alpha\xi_\sigma^\kappa - \xi_\omega^\alpha\gamma_{\beta\sigma}^\omega\right) \tag{35}$$

Il campo di vettori indotto sul fibrato $C(M)$ dal campo di vettori $\vec{\xi} \in \mathfrak{X}(M)$ attraverso il campo $L^2(\vec{\xi}\,) \in \mathfrak{X}_P(L^2(M))$ è, quindi, il seguente

$$\vec{\Xi} = \xi^\beta\vec{\partial}_\beta - \left(\xi_{\beta\sigma}^\alpha + \gamma_{\kappa\sigma}^\alpha\xi_\beta^\kappa + \gamma_{\beta\kappa}^\alpha\xi_\sigma^\kappa - \xi_\omega^\alpha\gamma_{\beta\sigma}^\omega\right)\vec{\partial}_\alpha^{\beta\sigma}\,, \tag{36}$$

[8] Vedere il foglio di lavoro di Maple 18 allegato per la dimostrazione.

dove si è posto $\xi^\alpha = \xi^\alpha(x)$, $\xi^\alpha_\beta = \partial_\beta \xi^\alpha(x)$, $\xi^\alpha_{\beta\sigma} = \partial_\sigma \partial_\beta \xi^\alpha(x)$, $\vec{\partial}_\beta = \frac{\partial}{\partial x^\beta}$ e $\vec{\partial}^{\beta\sigma}_\alpha = \frac{\partial}{\partial \gamma^\alpha_{\beta\sigma}}$. Il campo $\vec{\Xi} \in \mathfrak{X}(C(M))$ così ottenuto è proiettabile e si proietta sul campo $\vec{\xi} \in \mathfrak{X}(M)$.

Per definire la derivata di Lie di una sezione Γ del fibrato $C(M)$ rispetto al campo $\vec{\xi}$ si procede in modo analogo a quanto fatto per le derivate covarianti di sezioni di varietà fibrate. Per prima cosa si definisce

$$L_{\vec{\Xi}}(\Gamma) = T(\Gamma) \circ \vec{\xi} - \vec{\Xi} \circ \Gamma$$

ottenendo, in questo modo, un campo di vettori verticali sopra alla sezione Γ. Siccome $C(M)$ è un fibrato affine su M, modellato sul fibrato vettoriale $T^1_2(M)$, il fibrato dei vettori verticali $V(C(M))$ è naturalmente isomorfo al prodotto cartesiano fibrato $C(M) \times_M T^1_2(M)$. La derivata di Lie $L_{\vec{\Xi}}(\Gamma)$ può, quindi, essere rappresentata da una coppia $\big(\Gamma, L_{\vec{\xi}}(\Gamma)\big)$ dove le componenti $L_{\vec{\xi}}\Gamma^\alpha_{\beta\mu} \doteq (L_{\vec{\xi}}(\Gamma))^\alpha_{\beta\mu}$ del campo di tensori $L_{\vec{\xi}}(\Gamma)$ sono definite da

$$\begin{aligned} L_{\vec{\xi}}\Gamma^\alpha_{\beta\mu} &= \xi^\sigma \partial_\sigma \Gamma^\alpha_{\beta\mu} - \xi^\alpha_\omega \Gamma^\omega_{\beta\mu} + \Gamma^\alpha_{\kappa\mu}\xi^\kappa_\beta + \Gamma^\alpha_{\beta\kappa}\xi^\kappa_\mu + \xi^\alpha_{\beta\mu} && (37) \\ &\equiv R^\alpha_{\beta\sigma\mu}\xi^\sigma + \nabla_\mu \tilde{\nabla}_\beta \xi^\alpha && (38) \end{aligned}$$

Se la connessione $\Gamma^\alpha_{\beta\mu}$ è simmetrica, allora anche la derivata di Lie $L_{\vec{\xi}}\Gamma^\alpha_{\beta\mu}$ è un tensore simmetrico nei due indici covarianti, cioè $L_{\vec{\xi}}(\Gamma) \in S^1_2(M)$. Quando la connessione $\Gamma^\alpha_{\beta\mu}$ coincide coi simboli di

Christoffel di seconda specie di una metrica $g_{\alpha\beta}$ si dimostra facilmente che[9]:

$$L_{\vec{\xi}}\Gamma^{\alpha}_{\beta\mu} = \frac{1}{2}g^{\alpha\sigma}\left(\nabla_{\beta}\left(L_{\vec{\xi}}g_{\sigma\mu}\right) + \nabla_{\mu}\left(L_{\vec{\xi}}g_{\sigma\beta}\right) - \nabla_{\sigma}\left(L_{\vec{\xi}}g_{\beta\mu}\right)\right) \tag{39}$$

In particolare, se il campo di vettori $\vec{\xi}$ è un campo di Killing (isometria infinitesima) di una metrica $g_{\alpha\beta}$, ovvero $L_{\vec{\xi}}g_{\alpha\beta} = 0$, si ha:

$$L_{\vec{\xi}}g_{\alpha\beta} = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad L_{\vec{\xi}}\Gamma^{\alpha}_{\beta\mu} = 0 \tag{40}$$

[9]Questa formula assomiglia alla formula di Palatini per la variazione dei simboli di Christoffel di seconda specie della metrica $g_{\alpha\beta}$.

Riferimenti bibliografici

[1] S. Kobayashi, K. Nomizu: *Foundations of Differential Geometry, Vol. I*; John Wiley & Sons, New York · Chichester · Brisbane · Toronto · Singapore, 1963.

[2] S. Kobayashi, K. Nomizu: *Foundations of Differential Geometry, Vol. II*; John Wiley & Sons, New York · Chichester · Brisbane · Toronto, 1969.

[3] J. Dieudonné: *Éléments d'analyse 1 / Fondements de l'analyse moderne*; Gauthier–Villars, Paris, 1969.

[4] J. Dieudonné: *Éléments d'analyse 3*; Gauthier–Villars, Paris, 1969.

[5] P.L. García–Pérez: *Connections and* 1*–jet Fiber Bundles*, Rend. Sem. Mat. Univ. Padova **47**, 227–242 (1972).

[6] I. Kolář, P.W. Michor, J. Slovák: *Natural Operations in Differential Geometry*, Springer–Verlag, Berlin Heidelberg 1993.

[7] P.J. Olver: *Equivalence, Invariants and Symmetry*; Cambridge University Press, 1995.

[8] J. E. Marsden, T. Ratiu, R. Abraham: *Manifolds, tensor analysis and applications, Third Edition*; Springer–Verlag, 2001.

[9] M. Ferraris: *Appunti di agebra lineare, multilineare e tensori*; 2023.

[10] M. Ferraris: *Appunti di calcolo differenziale*; 2023.

[11] M. Ferraris: *Appunti di calcolo sulle varietà differenziabili*; 2023.

[12] M. Ferraris: *Appunti sui gruppi di Lie*; 2023.