Appunti di Calcolo delle Variazioni su varietà fibrate

Marco FERRARIS

Dipartimento di Matematica “Giuseppe Peano”

Università degli Studi di Torino

2023

Sommario

Per l'integrazione delle forme differenziali si veda [10]. Per il calcolo delle variazioni sulle varietà fibrate si veda, ad esempio, [6]. ...

....

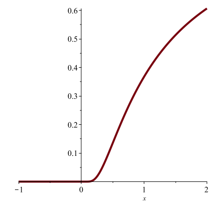
1 Integrazione delle forme differenziali

1.1 Funzioni a campana

Dato un numero reale $a \in \mathbb{R}$, possiamo considerare funzioni $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R};\mathbb{R})$ tali che $x \leq a \Rightarrow f(x) = 0 \ \wedge \ x > a \Rightarrow f(x) > 0$. L'esempio tipico di funzioni di questo tipo è la funzione $f : x \mapsto \phi(x - a)$

dove la funzione ϕ è definita da

$$\phi(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ e^{-\frac{1}{x}}, & x > 0 \end{cases}$$



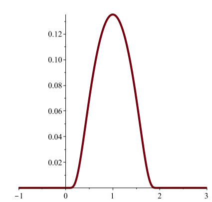
Siccome la funzione ϕ è derivabile infinite volte in ogni punto $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ e si ha:

$$\lim_{x \to 0^-} D^k(\phi)(x) = 0 = \lim_{x \to 0^+} D^k(\phi)(x)\,.$$

Possiamo, quindi, affermare che $\phi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R};\mathbb{R})$ e che $\forall k \geq 1$ si ha $D^k(\phi)(0) = 0$. Per costruzione, la funzione ϕ è analitica in ogni punto $x \neq 0$.

La funzione $f : x \mapsto \phi(a - x)$ è di classe $\mathcal{C}^\infty$ e si ha $x \geq a \Rightarrow f(x) = 0 \ \wedge \ x < a \Rightarrow f(x) > 0$. Se consideriamo due numeri reali $a, b \in \mathbb{R}$, con $a < b$, possiamo considerare le funzioni $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R};\mathbb{R})$ definite da

$$f : x \mapsto \phi(x - a) \cdot \phi(b - x)$$



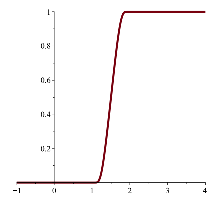
che sono positive nell'intervallo aperto (a, b) e si annullano fuori da esso. Ovviamente, la funzione f è analitica in tutti i punti $x \in \mathbb{R} \setminus \{a, b\}$.

Altre funzioni che ci interessano sono funzioni $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R};\mathbb{R})$ tali che

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \le a \\ > 0, & a < x < b \\ 1, & x > b \end{cases}$$

Ad esempio, possiamo considerare la funzione f che per $a < x < b$ è definita da

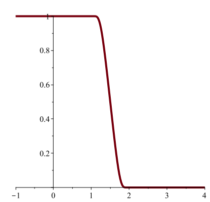
$$f : x \mapsto \frac{1}{2}\left(1 + \tanh\left(\frac{2\,x - a - b}{(x-a)\,(b-x)}\right)\right)$$



mentre $f(x) \equiv 0$ se $x \le a$ e $f(x) \equiv 1$ se $x \ge b$.

Se, invece, consideriamo la funzione f che per $a < x < b$ è definita da

$$x \mapsto \frac{1}{2}\left(1 - \tanh\left(\frac{2\,x - a - b}{(x-a)\,(b-x)}\right)\right)$$

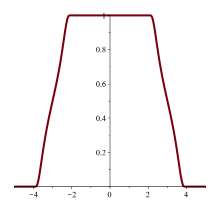


possiamo estenderla in modo che sia $f(x) \equiv 1$ se $x \le a$ e $f(x) \equiv 0$ se $x \ge b$ ottenendo una funzione $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R};\mathbb{R})$ tale che

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \le a \\ > 0, & a < x < b \\ 0, & x > b \end{cases}$$

A questo punto possiamo costruire funzioni $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R};\mathbb{R})$ tali che, dati 4 punti $a < r < s < b \in \mathbb{R}$, la funzione valga 0 al di fuori dell'intervallo aperto (a, b), valga 1 nell'intervallo chiuso $[r, s]$ e sia positiva nei due intervalli aperti (a, r) e (s, b)

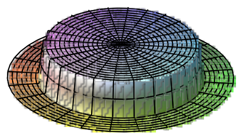
$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq a \\ > 0, & a < x < r \\ 1, & r \geq x \geq s \\ > 0, & s < x < b \\ 0, & x \geq b \end{cases}$$



Possiamo costruire funzioni $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R};\mathbb{R})$ che sono analitiche all'infuori di un numero finito di punti.

Quando pensiamo a funzioni $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^m, \mathbb{R})$, possiamo considerare le funzioni a campana che valgono 1 all'interno di un intorno aperto U di un punto $p \in M$, 0 al di fuori da un altro intorno aperto $V \supset \bar{U}$ del punto p e che sono positive nell'aperto $V \setminus \bar{U}$. Gli intorni possono essere scelti relativamente compatti. Ad esempio:

$$f(p+\vec{\boldsymbol{x}}) = \begin{cases} 1, & \|\vec{\boldsymbol{x}}\| \leq r \\ \frac{1}{2}\left(1-\tanh\left(\frac{2\,\|\vec{\boldsymbol{x}}\|-r-(r+\epsilon)}{(\|\vec{\boldsymbol{x}}\|-r)(r+\epsilon-\|\vec{\boldsymbol{x}}\|)}\right)\right), & r < \|\vec{\boldsymbol{x}}\| < r+\epsilon \\ 0, & \|\vec{\boldsymbol{x}}\| \geq r+\epsilon \end{cases}$$



1.2 Partizioni dell'unità

Consideriamo una successione finita o infinita di funzioni $f_a \in \mathcal{C}^\infty(M;\mathbb{R})$ tali che le funzioni f_a non siano mai negative e che i supporti $\mathrm{supp}(f_a)$ siano compatti e con interni U_a che formino un ricoprimento localmente finito delle varietà M. Diciamo che la successione di funzioni f_a è una partizione dell'unità se $\sum_a f_a \equiv 1$. Nelle applicazioni si considerano normalmente successioni di funzioni f_a tali che i supporti $\mathrm{supp}(f_a)$ siano contenuti in domini di carte della varietà M.

1.3 Integrazione di m–forme differenziali su $\mathbb{R}^m$

Se consideriamo una m–forma $\underline{\boldsymbol{\omega}} \in \boldsymbol{\Omega}^m(\mathbb{R}^m)$ e la scriviamo con le componenti rispetto alle solite coordinate cartesiane (x^α) di $\mathbb{R}^m$ otteniamo

$$\underline{\boldsymbol{\omega}} = \omega_{\alpha_1 \dots \alpha_m}(x)\, dx^{\alpha_1} \otimes \cdots \otimes dx^{\alpha_m} = \tfrac{1}{m!}\, \omega_{\alpha_1 \dots \alpha_m}(x)\, dx^{\alpha_1} \wedge \cdots \wedge dx^{\alpha_m} = \hat{\omega}(x)\, ds(x)$$

dove

$$\begin{aligned}
\omega_{\alpha_1 \dots \alpha_m} &= \hat{\omega}(x) \varepsilon_{\alpha_1 \dots \alpha_m} \\
\hat{\omega}(x) &= \tfrac{1}{m!}\, \omega_{\sigma_1 \dots \sigma_m}(x) \varepsilon^{\sigma_1 \dots \sigma_m} \\
ds(x) &= \varepsilon_{\nu_1 \dots \nu_m} dx^{\nu_1} \otimes \cdots \otimes dx^{\nu_m} \\
&= \tfrac{1}{m!}\, \varepsilon_{\nu_1 \dots \nu_m} dx^{\nu_1} \wedge \cdots \wedge dx^{\nu_m} \\
&= dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^m
\end{aligned}$$

Se la funzione $\hat{\omega} \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^m; \mathbb{R})$ ha supporto compatto, allora può essere integrata su tutto $\mathbb{R}^m$ con la misura di Lebesgue $dx^1 \cdots dx^m$ e definiamo l'integrale di $\underline{\boldsymbol{\omega}}$ su $\mathbb{R}^m$ con la formula

$$\int_{\mathbb{R}^m} \underline{\boldsymbol{\omega}} := \int_{\mathbb{R}^m} \hat{\omega}(x)\, dx^1 \cdots dx^m$$

Se $f \in \mathrm{Diff}(\mathbb{R}^m)$ è un diffeomorfismo che conserva l'orientazione (cioè: $\det(D(f)) > 0$) allora sappiamo che

$$\int_{\mathbb{R}^m} f_*(\underline{\boldsymbol{\omega}}) = \int_{\mathbb{R}^m} \underline{\boldsymbol{\omega}} \qquad ; \qquad \int_{\mathbb{R}^m} f^*(\underline{\boldsymbol{\omega}}) = \int_{\mathbb{R}^m} \underline{\boldsymbol{\omega}}$$

se, invece, il diffeomorfismo f inverte l'orientazione (cioè: $\det(D(f)) < 0$) allora si ha:

$$\int_{\mathbb{R}^m} f_*(\underline{\boldsymbol{\omega}}) = -\int_{\mathbb{R}^m} \underline{\boldsymbol{\omega}} \qquad ; \qquad \int_{\mathbb{R}^m} f^*(\underline{\boldsymbol{\omega}}) = -\int_{\mathbb{R}^m} \underline{\boldsymbol{\omega}}$$

Se $U \subset \mathbb{R}^m$ è un aperto che contiene il supporto di $\underline{\boldsymbol{\omega}}$, allora possiamo definire

$$\int_U \underline{\boldsymbol{\omega}} = \int_{\mathbb{R}^m} \underline{\boldsymbol{\omega}}$$

e possiamo affermare che

$$\int_{f(U)} f_*(\underline{\boldsymbol{\omega}}) = \int_U \underline{\boldsymbol{\omega}} \qquad ; \qquad \int_{f^{-1}(U)} f^*(\underline{\boldsymbol{\omega}}) = \int_U \underline{\boldsymbol{\omega}}$$

per ogni diffeomorfismo $f \in \mathrm{Diff}(\mathbb{R}^m)$ che conserva l'orientazione. Se, invece, il diffeomorfismo f inverte l'orientazione si ha

$$\int_{f(U)} f_*(\underline{\boldsymbol{\omega}}) = -\int_U \underline{\boldsymbol{\omega}} \qquad ; \qquad \int_{f^{-1}(U)} f^*(\underline{\boldsymbol{\omega}}) = -\int_U \underline{\boldsymbol{\omega}}$$

1.4 Integrazione di m–forme differenziali su varietà di dimensione m

Se consideriamo una m–forma $\underline{\boldsymbol{\omega}} \in \boldsymbol{\Omega}^m(M)$ su una varietà M di dimensione m ed il supporto di $\underline{\boldsymbol{\omega}}$ è un compatto "abbastanza piccolo" da essere contenuto nel dominio di una carta $\mathfrak{c} = (U, \varphi)$ allora possiamo definire l'integrale

$$\int_M \underline{\boldsymbol{\omega}} := \int_U \underline{\boldsymbol{\omega}} := \int_{\varphi(U)} \varphi_*(\underline{\boldsymbol{\omega}})$$

L'integrale $\int_M \underline{\boldsymbol{\omega}}$ è ben definito a patto di lavorare su varietà orientate ed utilizzando solo carte $\mathfrak{c} = (U, \varphi)$ orientate positivamente. **Dimostrazione.**

Se consideriamo due carte $\mathfrak{c}_1 = (U_1, \varphi_1)$ e $\mathfrak{c}_2 = (U_2, \varphi_2)$ orientate positivamente e tali che $\mathrm{supp}(\underline{\boldsymbol{\omega}}) \subset U_{12} = U_1 \cap U_2 (\neq \emptyset)$, allora dobbiamo verificare che

$$\int_{\varphi_1(U_{12})} (\varphi_1)_*(\underline{\boldsymbol{\omega}}) = \int_{\varphi_2(U_{12})} (\varphi_2)_*(\underline{\boldsymbol{\omega}})$$

Ma, sapendo che $\varphi_2 = \varphi_{21} \circ \varphi_1$ e che il diffeomorfismo φ_{21} conserva l'orientazione, otteniamo

$$\int_{\varphi_2(U_{12})} (\varphi_2)_*(\underline{\boldsymbol{\omega}}) = \int_{\varphi_{21}(\varphi_1(U_{12}))} (\varphi_{21})_*((\varphi_1)_*(\underline{\boldsymbol{\omega}})) = \int_{\varphi_1(U_{12})} (\varphi_1)_*(\underline{\boldsymbol{\omega}})$$

■

Se il supporto $\mathrm{supp}(\underline{\boldsymbol{\omega}})$ non è "abbastanza piccolo", allora possiamo risolvere il problema di calcolare l'integrale scegliendo una partizione dell'unità (f_a) e consideriamo le forme $\underline{\boldsymbol{\omega}}_a = f_a \cdot \underline{\boldsymbol{\omega}}$, calcolare gli integrali $\int_M \underline{\boldsymbol{\omega}}_a$ e definire $\int_M \underline{\boldsymbol{\omega}} = \sum_a \int_M \underline{\boldsymbol{\omega}}_a$. La sommatoria $\sum_a \int_M \underline{\boldsymbol{\omega}}_a$ è sempre una sommatoria finita, e non è mai una serie, perché solo un numero finito delle m-forme $\underline{\boldsymbol{\omega}}_a$ è diversa da $0 \in \boldsymbol{\Omega}^m(M)$. Si dimostra che il risultato non dipende dalla scelta della partizione dell'unità che viene scelta. Per la teoria generale rimandiamo all'ottimo libro [10].

1.5 Integrazione di k–forme differenziali su sottovarietà di dimensione k

Consideriamo una sottovarietà orientabile N, di dimensione k, di una varietà M di dimensione $m > k$[1]. Se consideriamo una k–forma a supporto compatto $\underline{\boldsymbol{\omega}} \in \boldsymbol{\Omega}^k(M)$ allora possiamo definire l'integrale

$$\int_N \underline{\boldsymbol{\omega}} := \int_N (\iota_N)^*(\underline{\boldsymbol{\omega}})$$

dove $\iota_N : N \longrightarrow M$ è l'iniezione canonica. Se $\underline{\boldsymbol{\omega}} \in \boldsymbol{\Omega}^k(M)$ non ha supporto compatto ma $(\iota_N)^*(\underline{\boldsymbol{\omega}}) \in \boldsymbol{\Omega}^k(N)$ ha supporto compatto non ci sono problemi a definire l'integrale.

1.6 Sottovarietà con bordo e teorema di Stokes

Un sottoinsieme $S \subset M$ tale che per ogni punto $p \in S$ esiste un sistema di coordinate $(U, x^1, x^2, \ldots, x^m)$, in M, tale che nell'insieme $U \cap S$ si abbia $x^1 \leq 0$ (oppure $x^1 < 0$). I punti in cui $x^1 < 0$ sono i punti interni di S mentre i punti in cui $x^1 = 0$ sono i punti del bordo ∂S, che è una sottovarietà di dimensione $m - 1$ di M.

Quando M è una varietà orientabile, ognuna delle due orientazioni di M induce una orientazione del bordo ∂S delle sottovarietà con bordo S di M. Basta considerare sistemi di coordinate $(U, x^1, x^2, \ldots, x^m)$ come quelle precedenti che siano orientate positivamente per l'orientazione scelta su M.

---

[1] Attenzione che all'interno di varietà orientate esistono sottovarietà non orientabili (tipo nastri di Möbius e bottiglie di Klein) e all'interno di varietà non orientabili esistono sottovarietà orientabili

Dimostrazione. Consideriamo due sistemi di coordinate $(x^1, x^2, \ldots, x^m)$ ed $(y^1, y^2, \ldots, y^m)$ attorno ad un punto $p \in \partial S$ del bordo di S.

Per quanto riguarda le trasformazioni di coordinate sappiamo che $y^1(0, x^2, \ldots, x^m) \equiv 0$ e che $x^1(0, y^2, \ldots, y^m) \equiv 0$. Calcolando la matrice jacobiana in un punto del bordo ∂S della trasformazione $(x^\alpha) \longrightarrow (y^\beta)$

$$\left(\begin{array}{c|c} \frac{\partial y^1}{\partial x^1}(0, x^2, \ldots, x^m) & \frac{\partial y^1}{\partial x^k}(0, x^2, \ldots, x^m) \\ \hline \frac{\partial y^i}{\partial x^1}(0, x^2, \ldots, x^m) & \frac{\partial y^i}{\partial x^k}(0, x^2, \ldots, x^m) \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} \frac{\partial y^1}{\partial x^1}(0, x^2, \ldots, x^m) & 0 \\ \hline \frac{\partial y^i}{\partial x^1}(0, x^2, \ldots, x^m) & \frac{\partial y^i}{\partial x^k}(0, x^2, \ldots, x^m) \end{array}\right)$$

Gli indici latini vanno da 2 a m e quelli greci da 1 a m. Ovviamente si ha:

$$\det\left(\frac{\partial y^\alpha}{\partial x^\beta}(0, x^2, \ldots, x^m)\right) = \frac{\partial y^1}{\partial x^1}(0, x^2, \ldots, x^m) \cdot \det\left(\frac{\partial y^i}{\partial x^k}(0, x^2, \ldots, x^m)\right)$$

Siccome le derivate $\frac{\partial y^1}{\partial x^1}(0, x^2, \ldots, x^m)$ devono essere por forza positive si vede che i due determinanti

$$\det\left(\frac{\partial y^\alpha}{\partial x^\beta}(0, x^2, \ldots, x^m)\right) \qquad \text{e} \qquad \det\left(\frac{\partial y^i}{\partial x^k}(0, x^2, \ldots, x^m)\right)$$

hanno lo stesso segno.

■

Il teorema di Stokes dice che per ogni $(m-1)$–forma $\underline{\boldsymbol{\alpha}} \in \boldsymbol{\Omega}^{m-1}(M)$ e per ogni sottovarietà compatta con bordo S calcolando l'integrale di $\underline{\boldsymbol{\alpha}}$ su ∂S si ottiene

$$\int_{\partial S} \underline{\boldsymbol{\alpha}} = \int_S d\underline{\boldsymbol{\alpha}}$$

(su ∂S si deve prendere l'orientazione indotta da quella di M).

Dimostrazione. Dato un sistema di coordinate $(x^1, x^2, \ldots, x^m)$, la $(m-1)$–forma $\underline{\boldsymbol{\alpha}} \in \boldsymbol{\Omega}^{m-1}(M)$ viene rappresentata da

$$\underline{\boldsymbol{\alpha}} = \alpha_{\nu_2 \ldots \nu_m}(x) dx^{\nu_2} \otimes \cdots \otimes dx^{\nu_m} = \tfrac{1}{(m-1)!}\, \alpha_{\nu_2 \ldots \nu_m}(x)\, dx^{\nu_2} \wedge \cdots \wedge dx^{\nu_m} = \hat{\alpha}^{\mu}(x)\, ds_{\mu}(x)$$

dove

$$\begin{aligned}
\alpha_{\nu_2 \ldots \nu_m}(x) &= \hat{\alpha}^{\mu}(x)\, \varepsilon_{\mu\nu_2 \ldots \nu_m} \\
\hat{\alpha}^{\mu}(x) &= \tfrac{1}{(m-1)!}\, \alpha_{\sigma_2 \ldots \sigma_m}(x) \varepsilon^{\mu\sigma_2 \ldots \sigma_m} \\
ds_{\mu}(x) &= \varepsilon_{\mu\nu_2 \ldots \nu_m} dx^{\nu_2} \otimes \cdots \otimes dx^{\nu_m} \\
&= \tfrac{1}{(m-1)!}\, \varepsilon_{\mu\nu_2 \ldots \nu_m} dx^{\nu_2} \wedge \cdots \wedge dx^{\nu_m}
\end{aligned}$$

Calcolando i prodotti esterni $dx^{\lambda} \wedge ds_{\mu}$ si ottiene

$$dx^{\lambda} \wedge ds_{\mu}(x) = \delta^{\lambda}_{\mu}\, ds(x)$$

da cui si deduce che

$$d\underline{\boldsymbol{\alpha}} = d(\hat{\alpha}^{\mu}(x)\, ds_{\mu}(x)) = (d\hat{\alpha}^{\mu}(x)) \wedge ds_{\mu}(x) = \partial_{\nu}\hat{\alpha}^{\mu}(x) dx^{\nu} \wedge ds_{\mu}(x) = \partial_{\kappa}\hat{\alpha}^{\kappa}(x)\, ds(x)$$

Questa identità conclude, in pratica, la dimostrazione.

■

Se la sottovarietà con bordo S non è compatta possiamo iniziare a dimostrare il teorema per le forme $\underline{\boldsymbol{\alpha}}$ a supporto compatto e proseguire poi fino a dove è possibile.

FINE LEZIONE 21 MMdFC (2023-05-16 ore 11:00 – 13:00)

Riferimenti bibliografici

[1] S. Kobayashi, K. Nomizu: *Foundations of Differential Geometry, Vol. I*; John Wiley & Sons, New York · Chichester · Brisbane · Toronto · Singapore, 1963.

[2] S. Kobayashi, K. Nomizu: *Foundations of Differential Geometry, Vol. II*; John Wiley & Sons, New York · Chichester · Brisbane · Toronto, 1969.

[3] J. Dieudonné: *Éléments d'analyse 1 / Fondements de l'analyse moderne*; Gauthier–Villars, Paris, 1969.

[4] J. Dieudonné: *Éléments d'analyse 3*; Gauthier–Villars, Paris, 1969.

[5] P.L. García–Pérez: *Connections and* 1*–jet Fiber Bundles*, Rend. Sem. Mat. Univ. Padova **47**, 227–242 (1972).

[6] D. Krupka: *Some geometric aspects of variational problems in fibred manifolds*, . . . , (1973).

[7] M. Ferraris: *Fibered connections and global Poincaré-Cartan forms in higher-order calculus of variations*, Springer–Verlag, Berlin Heidelberg 1993; Differential geometry and its applications, Proc. Conf., Nové Město na Moravě/Czech. 1983, Pt. 2, 61-91 (1984).

[8] I. Kolář, P.W. Michor, J. Slovák: *Natural Operations in Differential Geometry*, Springer–Verlag, Berlin Heidelberg 1993.

[9] P.J. Olver: *Equivalence, Invariants and Symmetry*; Cambridge University Press, 1995.

[10] J. E. Marsden, T. Ratiu, R. Abraham: *Manifolds, tensor analysis and applications, Third Edition*; Springer–Verlag, 2001.

[11] M. Ferraris: *Appunti di agebra lineare, multilineare e tensori*; 2023.

[12] M. Ferraris: *Appunti di calcolo differenziale*; 2023.

[13] M. Ferraris: *Appunti di calcolo sulle varietà differenziabili*; 2023.

[14] M. Ferraris: *Appunti su gruppi di Lie e fibrati principali*; 2023.

[15] M. Ferraris: *Spazi di getti*; 2023.