Appunti di Calcolo delle Variazioni su varietà fibrate

Marco FERRARIS

Dipartimento di Matematica "Giuseppe Peano"
Università degli Studi di Torino

2023

Sommario

Per l'integrazione delle forme differenziali si veda [10]. Per il calcolo delle variazioni sulle varietà fibrate si veda, ad esempio, [6]. ...

....

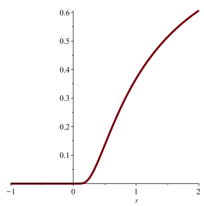
1 Integrazione delle forme differenziali

1.1 Funzioni a campana

Dato un numero reale $a \in \mathbb{R}$, possiamo considerare funzioni $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R};\mathbb{R})$ tali che $x \leq a \Rightarrow f(x) = 0 \ \wedge \ x > a \Rightarrow f(x) > 0$. L'esempio tipico di funzioni di questo tipo è la funzione $f : x \mapsto \phi(x - a)$

dove la funzione ϕ è definita da

$$\phi(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ e^{-\frac{1}{x}}, & x > 0 \end{cases}$$



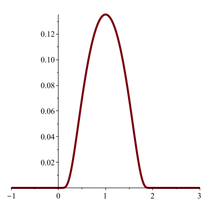
Siccome la funzione ϕ è derivabile infinite volte in ogni punto $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ e si ha:

$$\lim_{x \to 0^-} D^k(\phi)(x) = 0 = \lim_{x \to 0^+} D^k(\phi)(x)\,.$$

Possiamo, quindi, affermare che $\phi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R};\mathbb{R})$ e che $\forall k \geq 1$ si ha $D^k(\phi)(0) = 0$. Per costruzione, la funzione ϕ è analitica in ogni punto $x \neq 0$.

La funzione $f : x \mapsto \phi(a - x)$ è di classe $\mathcal{C}^\infty$ e si ha $x \geq a \Rightarrow f(x) = 0 \ \wedge \ x < a \Rightarrow f(x) > 0$. Se consideriamo due numeri reali $a, b \in \mathbb{R}$, con $a < b$, possiamo considerare le funzioni $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R};\mathbb{R})$ definite da

$$f : x \mapsto \phi(x - a) \cdot \phi(b - x)$$



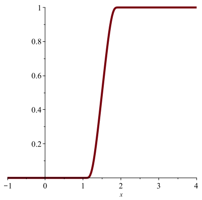
che sono positive nell'intervallo aperto (a, b) e si annullano fuori da esso. Ovviamente, la funzione f è analitica in tutti i punti $x \in \mathbb{R} \setminus \{a, b\}$.

Altre funzioni che ci interessano sono funzioni $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R};\mathbb{R})$ tali che

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \le a \\ > 0, & a < x < b \\ 1, & x > b \end{cases}$$

Ad esempio, possiamo considerare la funzione f che per $a < x < b$ è definita da

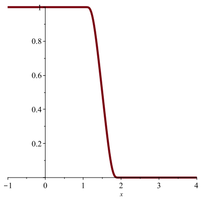
$$f : x \mapsto \frac{1}{2}\left(1 + \tanh\left(\frac{2\,x - a - b}{(x-a)\,(b-x)}\right)\right)$$



mentre $f(x) \equiv 0$ se $x \le a$ e $f(x) \equiv 1$ se $x \ge b$.

Se, invece, consideriamo la funzione f che per $a < x < b$ è definita da

$$x \mapsto \frac{1}{2}\left(1 - \tanh\left(\frac{2\,x - a - b}{(x-a)\,(b-x)}\right)\right)$$

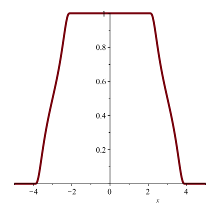


possiamo estenderla in modo che sia $f(x) \equiv 1$ se $x \le a$ e $f(x) \equiv 0$ se $x \ge b$ ottenendo una funzione $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R};\mathbb{R})$ tale che

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \le a \\ > 0, & a < x < b \\ 0, & x > b \end{cases}$$

A questo punto possiamo costruire funzioni $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R};\mathbb{R})$ tali che, dati 4 punti $a < r < s < b \in \mathbb{R}$, la funzione valga 0 al di fuori dell'intervallo aperto (a, b), valga 1 nell'intervallo chiuso $[r, s]$ e sia positiva nei due intervalli aperti (a, r) e (s, b)

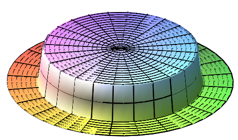
$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq a \\ > 0, & a < x < r \\ 1, & r \geq x \geq s \\ > 0, & s < x < b \\ 0, & x \geq b \end{cases}$$



Possiamo costruire funzioni $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R};\mathbb{R})$ che sono analitiche all'infuori di un numero finito di punti.

Quando pensiamo a funzioni $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^m, \mathbb{R})$, possiamo considerare le funzioni a campana che valgono 1 all'interno di un intorno aperto U di un punto $p \in M$, 0 al di fuori da un altro intorno aperto $V \supset \bar{U}$ del punto p e che sono positive nell'aperto $V \setminus \bar{U}$. Gli intorni possono essere scelti relativamente compatti. Ad esempio:

$$f(p+\vec{\boldsymbol{x}}) = \begin{cases} 1, & \|\vec{\boldsymbol{x}}\| \leq r \\ \frac{1}{2}\left(1-\tanh\left(\frac{2\,\|\vec{\boldsymbol{x}}\|-r-(r+\epsilon)}{(\|\vec{\boldsymbol{x}}\|-r)(r+\epsilon-\|\vec{\boldsymbol{x}}\|)}\right)\right), & r < \|\vec{\boldsymbol{x}}\| < r+\epsilon \\ 0, & \|\vec{\boldsymbol{x}}\| \geq r+\epsilon \end{cases}$$



1.2 Partizioni dell'unità

Consideriamo una successione finita o infinita di funzioni $f_a \in \mathcal{C}^\infty(M;\mathbb{R})$ tali che le funzioni f_a non siano mai negative e che i supporti $\mathrm{supp}(f_a)$ siano compatti e con interni U_a che formino un ricoprimento localmente finito delle varietà M. Diciamo che la successione di funzioni f_a è una partizione dell'unità se $\sum_a f_a \equiv 1$. Nelle applicazioni si considerano normalmente successioni di funzioni f_a tali che i supporti $\mathrm{supp}(f_a)$ siano contenuti in domini di carte della varietà M.

1.3 Integrazione di m–forme differenziali su $\mathbb{R}^m$

Se consideriamo una m–forma $\underline{\boldsymbol{\omega}} \in \boldsymbol{\Omega}^m(\mathbb{R}^m)$ e la scriviamo con le componenti rispetto alle solite coordinate cartesiane (x^α) di $\mathbb{R}^m$ otteniamo

$$\underline{\boldsymbol{\omega}} = \omega_{\alpha_1\dots\alpha_m}(x)\, dx^{\alpha_1} \otimes \cdots \otimes dx^{\alpha_m} = \tfrac{1}{m!}\, \omega_{\alpha_1\dots\alpha_m}(x)\, dx^{\alpha_1} \wedge \cdots \wedge dx^{\alpha_m} = \hat{\omega}(x)\, ds(x)$$

dove

$$\begin{aligned}
\omega_{\alpha_1\dots\alpha_m} &= \hat{\omega}(x)\varepsilon_{\alpha_1\dots\alpha_m} \\
\hat{\omega}(x) &= \tfrac{1}{m!}\, \omega_{\sigma_1\dots\sigma_m}(x)\varepsilon^{\sigma_1\dots\sigma_m} \\
ds(x) &= \varepsilon_{\nu_1\dots\nu_m} dx^{\nu_1} \otimes \cdots \otimes dx^{\nu_m} \\
&= \tfrac{1}{m!}\, \varepsilon_{\nu_1\dots\nu_m} dx^{\nu_1} \wedge \cdots \wedge dx^{\nu_m} \\
&= dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^m
\end{aligned}$$

Se la funzione $\hat{\omega} \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^m;\mathbb{R})$ ha supporto compatto, allora può essere integrata su tutto $\mathbb{R}^m$ con la misura di Lebesgue $dx^1 \cdots dx^m$ e definiamo l'integrale di $\underline{\boldsymbol{\omega}}$ su $\mathbb{R}^m$ con la formula

$$\int_{\mathbb{R}^m} \underline{\boldsymbol{\omega}} := \int_{\mathbb{R}^m} \hat{\omega}(x)\, dx^1 \cdots dx^m$$

Se $f \in \mathrm{Diff}(\mathbb{R}^m)$ è un diffeomorfismo che conserva l'orientazione (cioè: $\det(D(f)) > 0$) allora sappiamo che

$$\int_{\mathbb{R}^m} f_*(\underline{\boldsymbol{\omega}}) = \int_{\mathbb{R}^m} \underline{\boldsymbol{\omega}} \qquad ; \qquad \int_{\mathbb{R}^m} f^*(\underline{\boldsymbol{\omega}}) = \int_{\mathbb{R}^m} \underline{\boldsymbol{\omega}}$$

se, invece, il diffeomorfismo f inverte l'orientazione (cioè: $\det(D(f)) < 0$) allora si ha:

$$\int_{\mathbb{R}^m} f_*(\underline{\boldsymbol{\omega}}) = -\int_{\mathbb{R}^m} \underline{\boldsymbol{\omega}} \qquad ; \qquad \int_{\mathbb{R}^m} f^*(\underline{\boldsymbol{\omega}}) = -\int_{\mathbb{R}^m} \underline{\boldsymbol{\omega}}$$

Se $U \subset \mathbb{R}^m$ è un aperto che contiene il supporto di $\underline{\boldsymbol{\omega}}$, allora possiamo definire

$$\int_U \underline{\boldsymbol{\omega}} = \int_{\mathbb{R}^m} \underline{\boldsymbol{\omega}}$$

e possiamo affermare che

$$\int_{f(U)} f_*(\underline{\boldsymbol{\omega}}) = \int_U \underline{\boldsymbol{\omega}} \qquad ; \qquad \int_{f^{-1}(U)} f^*(\underline{\boldsymbol{\omega}}) = \int_U \underline{\boldsymbol{\omega}}$$

per ogni diffeomorfismo $f \in \mathrm{Diff}(\mathbb{R}^m)$ che conserva l'orientazione. Se, invece, il diffeomorfismo f inverte l'orientazione si ha

$$\int_{f(U)} f_*(\underline{\boldsymbol{\omega}}) = -\int_U \underline{\boldsymbol{\omega}} \qquad ; \qquad \int_{f^{-1}(U)} f^*(\underline{\boldsymbol{\omega}}) = -\int_U \underline{\boldsymbol{\omega}}$$

1.4 Integrazione di m–forme differenziali su varietà di dimensione m

Se consideriamo una m–forma $\underline{\boldsymbol{\omega}} \in \boldsymbol{\Omega}^m(M)$ su una varietà M di dimensione m ed il supporto di $\underline{\boldsymbol{\omega}}$ è un compatto "abbastanza piccolo" da essere contenuto nel dominio di una carta $\mathfrak{c} = (U, \varphi)$ allora possiamo definire l'integrale

$$\int_M \underline{\boldsymbol{\omega}} := \int_U \underline{\boldsymbol{\omega}} := \int_{\varphi(U)} \varphi_*(\underline{\boldsymbol{\omega}})$$

L'integrale $\int_M \underline{\boldsymbol{\omega}}$ è ben definito a patto di lavorare su varietà orientate ed utilizzando solo carte $\mathfrak{c} = (U, \varphi)$ orientate positivamente. **Dimostrazione.**

Se consideriamo due carte $\mathfrak{c}_1 = (U_1, \varphi_1)$ e $\mathfrak{c}_2 = (U_2, \varphi_2)$ orientate positivamente e tali che $\mathrm{supp}(\underline{\boldsymbol{\omega}}) \subset U_{12} = U_1 \cap U_2 (\neq \emptyset)$, allora dobbiamo verificare che

$$\int_{\varphi_1(U_{12})} (\varphi_1)_*(\underline{\boldsymbol{\omega}}) = \int_{\varphi_2(U_{12})} (\varphi_2)_*(\underline{\boldsymbol{\omega}})$$

Ma, sapendo che $\varphi_2 = \varphi_{21} \circ \varphi_1$ e che il diffeomorfismo φ_{21} conserva l'orientazione, otteniamo

$$\int_{\varphi_2(U_{12})} (\varphi_2)_*(\underline{\boldsymbol{\omega}}) = \int_{\varphi_{21}(\varphi_1(U_{12}))} (\varphi_{21})_*((\varphi_1)_*(\underline{\boldsymbol{\omega}})) = \int_{\varphi_1(U_{12})} (\varphi_1)_*(\underline{\boldsymbol{\omega}})$$

■

Se il supporto $\mathrm{supp}(\underline{\boldsymbol{\omega}})$ non è "abbastanza piccolo", allora possiamo risolvere il problema di calcolare l'integrale scegliendo una partizione dell'unità (f_a) e consideriamo le forme $\underline{\boldsymbol{\omega}}_a = f_a \cdot \underline{\boldsymbol{\omega}}$, calcolare gli integrali $\int_M \underline{\boldsymbol{\omega}}_a$ e definire $\int_M \underline{\boldsymbol{\omega}} = \sum_a \int_M \underline{\boldsymbol{\omega}}_a$. La sommatoria $\sum_a \int_M \underline{\boldsymbol{\omega}}_a$ è sempre una sommatoria finita, e non è mai una serie, perché solo un numero finito delle m-forme $\underline{\boldsymbol{\omega}}_a$ è diversa da $0 \in \boldsymbol{\Omega}^m(M)$. Si dimostra che il risultato non dipende dalla scelta della partizione dell'unità che viene scelta. Per la teoria generale rimandiamo all'ottimo libro [10].

1.5 Integrazione di k–forme differenziali su sottovarietà di dimensione k

Consideriamo una sottovarietà orientabile N, di dimensione k, di una varietà M di dimensione $m > k$[1]. Se consideriamo una k–forma a supporto compatto $\underline{\boldsymbol{\omega}} \in \boldsymbol{\Omega}^k(M)$ allora possiamo definire l'integrale

$$\int_N \underline{\boldsymbol{\omega}} := \int_N (\iota_N)^*(\underline{\boldsymbol{\omega}})$$

dove $\iota_N : N \longrightarrow M$ è l'iniezione canonica. Se $\underline{\boldsymbol{\omega}} \in \boldsymbol{\Omega}^k(M)$ non ha supporto compatto ma $(\iota_N)^*(\underline{\boldsymbol{\omega}}) \in \boldsymbol{\Omega}^k(N)$ ha supporto compatto non ci sono problemi a definire l'integrale.

1.6 Sottovarietà con bordo e teorema di Stokes

Un sottoinsieme $S \subset M$ tale che per ogni punto $p \in S$ esiste un sistema di coordinate $(U, x^1, x^2, \dots, x^m)$, in M, tale che nell'insieme $U \cap S$ si abbia $x^1 \leq 0$ (oppure $x^1 < 0$). I punti in cui $x^1 < 0$ sono i punti interni di S mentre i punti in cui $x^1 = 0$ sono i punti del bordo ∂S, che è una sottovarietà di dimensione $m - 1$ di M.

Quando M è una varietà orientabile, ognuna delle due orientazioni di M induce una orientazione del bordo ∂S delle sottovarietà con bordo S di M. Basta considerare sistemi di coordinate $(U, x^1, x^2, \dots, x^m)$ come quelle precedenti che siano orientate positivamente per l'orientazione scelta su M.

[1] Attenzione che all'interno di varietà orientate esistono sottovarietà non orientabili (tipo nastri di Möbius e bottiglie di Klein) e all'interno di varietà non orientabili esistono sottovarietà orientabili

Dimostrazione. Consideriamo due sistemi di coordinate $(x^1, x^2, \ldots, x^m)$ ed $(y^1, y^2, \ldots, y^m)$ attorno ad un punto $p \in \partial S$ del bordo di S.

Per quanto riguarda le trasformazioni di coordinate sappiamo che $y^1(0, x^2, \ldots, x^m) \equiv 0$ e che $x^1(0, y^2, \ldots, y^m) \equiv 0$. Calcolando la matrice jacobiana in un punto del bordo ∂S della trasformazione $(x^\alpha) \longrightarrow (y^\beta)$

$$\left(\begin{array}{c|c} \frac{\partial y^1}{\partial x^1}(0, x^2, \ldots, x^m) & \frac{\partial y^1}{\partial x^k}(0, x^2, \ldots, x^m) \\ \hline \frac{\partial y^i}{\partial x^1}(0, x^2, \ldots, x^m) & \frac{\partial y^i}{\partial x^k}(0, x^2, \ldots, x^m) \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} \frac{\partial y^1}{\partial x^1}(0, x^2, \ldots, x^m) & 0 \\ \hline \frac{\partial y^i}{\partial x^1}(0, x^2, \ldots, x^m) & \frac{\partial y^i}{\partial x^k}(0, x^2, \ldots, x^m) \end{array}\right)$$

Gli indici latini vanno da 2 a m e quelli greci da 1 a m. Ovviamente si ha:

$$\det\left(\frac{\partial y^\alpha}{\partial x^\beta}(0, x^2, \ldots, x^m)\right) = \frac{\partial y^1}{\partial x^1}(0, x^2, \ldots, x^m) \cdot \det\left(\frac{\partial y^i}{\partial x^k}(0, x^2, \ldots, x^m)\right)$$

Siccome le derivate $\frac{\partial y^1}{\partial x^1}(0, x^2, \ldots, x^m)$ devono essere por forza positive si vede che i due determinanti

$$\det\left(\frac{\partial y^\alpha}{\partial x^\beta}(0, x^2, \ldots, x^m)\right) \qquad \text{e} \qquad \det\left(\frac{\partial y^i}{\partial x^k}(0, x^2, \ldots, x^m)\right)$$

hanno lo stesso segno.

■

Il teorema di Stokes dice che per ogni $(m-1)$–forma $\underline{\boldsymbol{\alpha}} \in \boldsymbol{\Omega}^{m-1}(M)$ e per ogni sottovarietà compatta con bordo S calcolando l'integrale di $\underline{\boldsymbol{\alpha}}$ su ∂S si ottiene

$$\int_{\partial S} \underline{\boldsymbol{\alpha}} = \int_S d\underline{\boldsymbol{\alpha}}$$

(su ∂S si deve prendere l'orientazione indotta da quella di M).

Dimostrazione. Dato un sistema di coordinate $(x^1, x^2, \dots, x^m)$, la $(m-1)$–forma $\underline{\boldsymbol{\alpha}} \in \boldsymbol{\Omega}^{m-1}(M)$ viene rappresentata da

$$\underline{\boldsymbol{\alpha}} = \alpha_{\nu_2 \dots \nu_m}(x) dx^{\nu_2} \otimes \dots \otimes dx^{\nu_m} = \tfrac{1}{(m-1)!}\, \alpha_{\nu_2 \dots \nu_m}(x)\, dx^{\nu_2} \wedge \dots \wedge dx^{\nu_m} = \hat{\alpha}^{\mu}(x)\, ds_{\mu}(x)$$

dove

$$\begin{aligned} \alpha_{\nu_2 \dots \nu_m}(x) &= \hat{\alpha}^{\mu}(x)\, \varepsilon_{\mu\nu_2 \dots \nu_m} \\ \hat{\alpha}^{\mu}(x) &= \tfrac{1}{(m-1)!}\, \alpha_{\sigma_2 \dots \sigma_m}(x) \varepsilon^{\mu\sigma_2 \dots \sigma_m} \\ ds_{\mu}(x) &= \varepsilon_{\mu\nu_2 \dots \nu_m} dx^{\nu_2} \otimes \dots \otimes dx^{\nu_m} \\ &= \tfrac{1}{(m-1)!}\, \varepsilon_{\mu\nu_2 \dots \nu_m} dx^{\nu_2} \wedge \dots \wedge dx^{\nu_m} \end{aligned}$$

Calcolando i prodotti esterni $dx^{\lambda} \wedge ds_{\mu}$ si ottiene

$$dx^{\lambda} \wedge ds_{\mu}(x) = \delta^{\lambda}_{\mu}\, ds(x)$$

da cui si deduce che

$$d\underline{\boldsymbol{\alpha}} = d(\hat{\alpha}^{\mu}(x)\, ds_{\mu}(x)) = (d\hat{\alpha}^{\mu}(x)) \wedge ds_{\mu}(x) = \partial_{\nu}\hat{\alpha}^{\mu}(x) dx^{\nu} \wedge ds_{\mu}(x) = \partial_{\kappa}\hat{\alpha}^{\kappa}(x)\, ds(x)$$

Questa identità conclude, in pratica, la dimostrazione.

■

Se la sottovarietà con bordo S non è compatta possiamo iniziare a dimostrare il teorema per le forme $\underline{\boldsymbol{\alpha}}$ a supporto compatto e proseguire poi fino a dove è possibile.

FINE LEZIONE 21 MMdFC (2023-05-16 ore 11:00 – 13:00)

2 Lagrangiane del prim'ordine

Ci sono due punti di vista per studiare le teorie lagrangiane del prim'ordine sulle varietà fibrate. Il primo utilizza morfismi di fibrati dicendo che una lagrangiana del prim'ordine è un morfismo di varietà fibrate $\mathcal{L} : J^1(Z) \longrightarrow A^0_m(M)$. Il secondo utilizza forme orizzontali dicendo che una lagrangiana è una m–forma orizzontale $\boldsymbol{L} \in \boldsymbol{\mathcal{H}}^0_m(J^1(Z))$. Noi utilizzeremo di volta in volta il punto di vista che è più utile per dimostrare le proprietà che stiamo studiando.

In coordinate fibrate naturali si ha

$$\mathcal{L} : (x^\alpha, z^i, z^i_\mu) \longmapsto (x^\alpha, \hat{L}(x^\beta, z^i, z^i_\mu)) \tag{1}$$

e

$$\boldsymbol{L} = \hat{L}(x^\beta, z^i, z^i_\mu) ds(x) \tag{2}$$

dove la funzione $\hat{L}(x^\beta, z^i, z^i_\mu)$ è una densità scalare di peso 1.

Il funzionale d'azione associata alla forma lagrangiana $\boldsymbol{L}$ è dato dagli integrali

$$\mathcal{A}_\Omega(\sigma) = \int_\Omega (j^1\sigma)^* \boldsymbol{L} = \int_\Omega \hat{L}(j^1_x\sigma) ds(x) = \int_\Omega \hat{L}(x^\beta, \sigma^i(x), \partial_\mu \sigma^i(x)) ds(x)$$

dove σ è una sezione locale o globale della varietà fibrata $\zeta : Z \longrightarrow M$ e Ω è una sottovarietà con bordo compatta tale che $\Omega \subset \mathrm{Dom}(\sigma)$.

Risolvere il problema variazionale associato alla forma lagrangiana $\boldsymbol{L}$ consiste nello studiare i punti stazionari σ di tutti gli integrali d'azione $\mathcal{A}_\Omega(\cdot)$.

2.1 Variazione.

Per studiare i punti stazionari introduciamo per prima cosa le curve differenziabili $t \longmapsto \sigma_t$ nell'insieme delle sezioni di Z. Una curva differenziabile $t \longmapsto \sigma_t$ nello delle sezioni di Z è una omotopia differenziabile $(t, x) \longmapsto \sigma_t(x)$.

Supponiamo che l'intervallo aperto I in cui varia il parametro t sia tale che $0 \in I \subseteq \mathbb{R}$ e consideriamo tutte le curve differenziabili basate in una sezione fissata $\bar{\sigma}$, nel senso che $\sigma_0 = \bar{\sigma}$. Diciamo che $\bar{\sigma}$ è un punto stazionario per l'azione $\mathcal{A}_\Omega(\sigma)$ se ognuna delle funzioni $t \longmapsto \mathcal{A}_\Omega(\sigma_t)$ ha un punto stazionario in $t = 0$ o, visto che le funzioni $t \longmapsto \mathcal{A}_\Omega(\sigma_t)$ sono elementi di $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}; \mathbb{R})$, se si ha

$$\left.\frac{d\mathcal{A}_\Omega(\sigma_t)}{dt}\right|_{t=0} = 0$$

per ogni curva $t \longmapsto \sigma_t$ basata in $\bar{\sigma}$.

Se definiamo $\tilde{\sigma}^i(t, x^\alpha) = (\sigma_t)^i(x^\alpha)$, allora l'azione è

$$\mathcal{A}_\Omega(\sigma_t) = \int_\Omega (j^1\sigma_t)^* \boldsymbol{L} = \int_\Omega \hat{L}\big(x, \tilde{\sigma}^i(t, x), \partial_\mu \tilde{\sigma}^i(t, x)\big) ds(x)$$

mentre

$$\frac{d\mathcal{A}_\Omega(\sigma_t)}{dt} = \int_\Omega \Big(\partial_k \hat{L}\big(x, \tilde{\sigma}^i(t, x), \partial_\mu \tilde{\sigma}^i(t, x)\big)\partial_t \tilde{\sigma}^k(t, x) + \partial^\mu_k \hat{L}\big(x, \tilde{\sigma}^i(t, x), \partial_\mu \tilde{\sigma}^i(t, x)\big)\partial_t \partial_\mu \tilde{\sigma}^k(t, x)\Big)\, ds(x)$$

Calcolando il tutto in $t = 0$ si ha

$$\delta\mathcal{A}_\Omega(\bar{\sigma}) = \int_\Omega \Big(\partial_k \hat{L}(j^1_x \bar{\sigma})\, \delta\bar{\sigma}^k(x) + \partial^\mu_k \hat{L}(j^1_x \bar{\sigma})\, \partial_\mu \delta\bar{\sigma}^k(x)\Big)\, ds(x) \tag{3}$$

dove si è posto

$$\delta\mathcal{A}_\Omega(\bar\sigma) = \left.\frac{d\mathcal{A}_\Omega(\sigma_t)}{dt}\right|_{t=0} \qquad , \qquad \delta\bar\sigma^k(x^\alpha) = \frac{\partial\tilde\sigma^k}{\partial t}(0,x)$$

Integrando per parti si ottiene

$$\delta\mathcal{A}_\Omega(\bar\sigma) = \int_\Omega \partial_\mu\left[\partial_k^\mu\hat L(j^1_x\bar\sigma)\delta\bar\sigma^k(x)\right]ds(x) + \int_\Omega\left\{\left[\partial_k\hat L(j^1_x\bar\sigma) - \partial_\mu\left(\partial^\mu_k\hat L(j^1_x\bar\sigma)\right)\right]\delta\bar\sigma^k(x)\right\}ds(x) \tag{4}$$

$$= \int_{\partial\Omega}\left[\partial_k^\mu\hat L(j^1_x\bar\sigma)\delta\bar\sigma^k(x)\right]ds_\mu(x) + \int_\Omega\left\{\left[\partial_k\hat L(j^1_x\bar\sigma) - \partial_\mu\left(\partial^\mu_k\hat L(j^1_x\bar\sigma)\right)\right]\delta\bar\sigma^k(x)\right\}ds(x) \tag{5}$$

2.2 Equazioni di Eulero–Lagrange.

Se nella (5) consideriamo solo le curve $t\longmapsto\sigma_t$ tali che $\delta\bar\sigma^k|_{\partial\Omega}=0$, possiamo dedurre che la condizione necessaria affinché $\delta\mathcal{A}_\Omega(\bar\sigma)=0$ è che la sezione $\bar\sigma$ sia una soluzione dell'equazione differenziale del second'ordine

$$\partial_k\hat L(j^1_x\bar\sigma) - \partial_\mu\left(\partial^\mu_k\hat L(j^1_x\bar\sigma)\right) = 0 \tag{6}$$

o, equivalentemente, una soluzione delle equazioni di Eulero–Lagrange

$$\left[\partial_k\hat L - d_\mu\left(\partial^\mu_k\hat L\right)\right](j^2_x\bar\sigma) = 0\,. \tag{7}$$

Osservazione 2.1. La funzione

$$\begin{array}{rcccc} \delta\bar\sigma & : & M & \longrightarrow & V(Z) \\ & & x & \longmapsto & (x,\bar\sigma^k(x),\delta\bar\sigma^k(x)) \end{array}$$

è una sezione della varietà fibrata $V(Z) \longrightarrow M$ che si proietta sulla sezione

$$\begin{array}{rcl} \bar{\sigma} \ : \ M & \longrightarrow & Z \\ x & \longmapsto & (x, \bar{\sigma}^k(x)) \end{array}$$

Da quanto visto in [15] per i prolungamenti dei campi di vettori, si deduce che esiste un epimorfismo di varietà fibrate su M

$$\begin{array}{rcl} ? \ : \quad J^1(T(Z)) & \longrightarrow & T(J^1(Z)) \\ (x^\alpha, z^i, \dot{x}^\alpha, \dot{z}^i, z^i_\nu, v^\alpha_\nu, w^i_\nu) & \longmapsto & (x^\alpha, z^i, z^i_\nu, \dot{x}^\alpha, \dot{z}^i, \dot{z}^i_\nu) \end{array}$$

definita essenzialmente da

$$\dot{z}^i_\nu = w^i_\nu - z^i_\sigma v^\sigma_\nu \, .$$

Restringendo l'epimorfismo alla varietà fibrata $J^1(V(Z))$ si ottiene un isomorfismo

$$J^1(V(Z)) \longleftrightarrow V(J^1(Z))$$

di varietà fibrate su M

$$\begin{array}{rcl} ? \ : \quad J^1(V(Z)) & \longrightarrow & V(J^1(Z)) \\ (x^\alpha, z^i, \dot{z}^i, z^i_\nu, v^i_\nu) & \longmapsto & (x^\alpha, z^i, z^i_\nu, \dot{z}^i, \dot{z}^i_\nu = v^i_\nu) \end{array}$$

Con queste ipotesi possiamo affermare che $j^1(\delta\bar{\sigma}) = \delta(j^1(\bar{\sigma}))$.

2.3 Forma di Poincaré–Cartan.

Anche per la forma lagrangiana del prim'ordine (2), le equazioni di Eulero-Lagrange (6) e/o (7) si possono dedurre da una forma differenziale analoga alla forma di Poincaré–Cartan che c'è in meccanica.

Nel nostro caso, la forma di Poincaré–Cartan sarà una m–forma $\boldsymbol{\Theta} \in \boldsymbol{\Omega}^m(J^1(Z))$ con le seguenti proprietà

1. per ogni sezione σ di Z su ha $(j^1\sigma)^*(\boldsymbol{\Theta}) = (j^1\sigma)^*(\boldsymbol{L})$,
2. deve essere $\boldsymbol{\Theta} \in \boldsymbol{\mathcal{H}}^0_m(J^1(Z)) \oplus \boldsymbol{\mathcal{H}}^1_{m-1}(J^1(Z))$,
3. il differenziale esterno $d\,\boldsymbol{\Theta}$ è una $(m+1)$–forma del tipo $d\,\boldsymbol{\Theta} \in \boldsymbol{\mathcal{K}}^1(J^1(Z)) \wedge \boldsymbol{\Omega}^m(J^1(Z))$.

Le condizioni 1 e 2 ci dicono che

$$\boldsymbol{\Theta} = \hat{L}(x^\alpha, z^i, z^s_\sigma)ds + \hat{F}^\mu_k(x^\alpha, z^i, z^s_\sigma)\underline{\boldsymbol{\omega}}^k \wedge ds_\mu \tag{8}$$

e, quindi, il differenziale $d\boldsymbol{\Theta}$ sarà

$$\begin{aligned} d\boldsymbol{\Theta} &= d\hat{L} \wedge ds + d\hat{F}^\mu_k \wedge \underline{\boldsymbol{\omega}}^k \wedge ds_\mu - \hat{F}^\mu_k dz^k_\mu \wedge ds & (9)\\ &= \underline{\boldsymbol{\omega}}^k \wedge \left(\partial_k \hat{L}\, ds - d\hat{F}^\mu_k \wedge ds_\mu\right) + \left(\partial^\mu_k \hat{L} - \hat{F}^\mu_k\right) dz^k_\mu \wedge ds & (10) \end{aligned}$$

Per avere una forma $\boldsymbol{\Theta}$ che soddisfa alla condizione 3 deve essere $\partial^\mu_k \hat{L} - \hat{F}^\mu_k = 0$. Siccome i due termini $\partial^\mu_k \hat{L}$ e $\hat{F}^\mu_k$ si trasformano nello stesso modo, perché sono la parte non banale di due morfismi $J^1(Z) \longrightarrow A^0_{m-1}(M) \otimes_Y V^*(Y)$, possiamo chiedere che, globalmente, sia $\hat{F}^\mu_k = \partial^\mu_k \hat{L}$.

Come risultato, la m–forma

$$\boldsymbol{\Theta}_{\boldsymbol{L}} = \hat{L}\, ds + \partial_k^\mu \hat{L}\, \underline{\boldsymbol{\omega}}^k \wedge ds_\mu \tag{11}$$

con differenziale

$$d\boldsymbol{\Theta}_{\boldsymbol{L}} = \underline{\boldsymbol{\omega}}^k \wedge \left(\partial_k \hat{L}\, ds - d\left(\partial_k^\mu \hat{L}\right) \wedge ds_\mu\right) \tag{12}$$

è l'unica m–forma $\boldsymbol{\Theta}$ che soddisfa le condizioni richieste e sarà detta *forma di Poincaré–Cartan* della lagrangiana $\boldsymbol{\mathcal{L}}$ o della forma lagrangiana $\boldsymbol{L}$.

Consideriamo ora un campo di vettori $\vec{\Xi}^{(1)} \in \mathfrak{X}(J^1(Z))$ e calcoliamo il prodotto interno $\vec{\Xi}^{(1)} \lrcorner\, d\boldsymbol{\Theta}_{\boldsymbol{L}}$ otteniamo

$$\begin{aligned}\vec{\Xi}^{(1)} \lrcorner\, d\boldsymbol{\Theta}_{\boldsymbol{L}} \;&=\; (\vec{\Xi}^{(1)} \lrcorner\, \underline{\boldsymbol{\omega}}^k) \left(\partial_k \hat{L}\, ds - d\left(\partial_k^\mu \hat{L}\right) \wedge ds_\mu\right) \\ &\quad - \underline{\boldsymbol{\omega}}^k \wedge \left(\vec{\Xi}^{(1)} \lrcorner \left(\partial_k \hat{L}\, ds - d\left(\partial_k^\mu \hat{L}\right) \wedge ds_\mu\right)\right)\end{aligned} \tag{13}$$

e, quindi, per ogni sezione σ della varietà fibrata Z si ha

$$(j^1\sigma)^* \left(\vec{\Xi}^{(1)} \lrcorner\, d\boldsymbol{\Theta}_{\boldsymbol{L}}\right) \;=\; (j^1\sigma)^*(\vec{\Xi}^{(1)} \lrcorner\, \underline{\boldsymbol{\omega}}^k)\; (j^1\sigma)^* \left(\partial_k \hat{L}\, ds - d\left(\partial_k^\mu \hat{L}\right) \wedge ds_\mu\right) \tag{14}$$

$$\;=\; \delta\sigma^k(x) \left(\partial_k \hat{L} \circ j^1\sigma - \partial_\mu \left(\partial_k^\mu \hat{L} \circ j^1\sigma\right)\right) ds \tag{15}$$

dove si è posto

$$\delta\sigma^k(x) = (j^1\sigma)^*(\vec{\Xi}^{(1)} \lrcorner\, \underline{\boldsymbol{\omega}}^k) = (\vec{\Xi}^{(1)} \lrcorner\, \underline{\boldsymbol{\omega}}^k) \circ j^1\sigma$$

Possiamo, quindi, affermare che σ è una soluzione delle equazioni di Eulero–Lagrange (6) se e solo se

$$(j^1\sigma)^* \left(\vec{\Xi}^{(1)} \rfloor \, d\boldsymbol{\Theta}_{\boldsymbol{L}} \right) = 0 \qquad \forall \, \vec{\Xi}^{(1)} \in \mathfrak{X}(J^1(Z)) \tag{16}$$

La condizione (16) è fin troppo generale, ma può essere alleggerita richiedendo che $\vec{\Xi}^{(1)}$ sia il prolungamento $J^1(\vec{\Xi})$ di un campo di vettori $\vec{\Xi} \in \mathfrak{X}(Z)$ o anche solo il prolungamento di un campo di vettori verticale $\vec{\Xi} \in \mathfrak{X}_{_V}(Z)$.

Esempio 2.1. [Lagrangiana del prim'ordine con equazioni banali]

Data una lagrangiana del prim'ordine $\hat{L}(x^\beta, z^i, z^i_\mu)$ del tipo

$$\hat{L} = d_\mu \left(f^\mu(x, z) \right) \quad = \quad \partial_\mu f^\mu(x, z) + z^k_\mu \partial_k f^\mu(x, z) \tag{17}$$

si ha

$$\begin{aligned} \partial^\lambda_i \hat{L} \; &= \; \partial_i f^\lambda && (18) \\ \partial_i \hat{L} \; &= \; d_\lambda \left(\partial_i f^\lambda \right) && (19) \end{aligned}$$

Quindi, la forma di Poincaré–Cartan

$$\begin{aligned} \Theta \; &= \; (d_\lambda f^\lambda) ds + (\partial_i f^\lambda) \underline{\boldsymbol{\omega}}^i \wedge ds_\lambda && (20) \\ &= \; d_{_H} f^\lambda \wedge ds_\lambda + d_{_V} f^\lambda \wedge ds_\lambda && (21) \\ &= \; d(f^\lambda ds_\lambda) && (22) \end{aligned}$$

è la controimmagine a $J^1(Z)$ di una m–forma esatta sulla varietà fibrata Z.

3 Lagrangiane del second'ordine

Anche in questo caso ci sono due punti di vista per studiare le teorie lagrangiane del second'ordine sulle varietà fibrate. Il primo utilizza morfismi di fibrati dicendo che una lagrangiana del prim'ordine è un morfismo di varietà fibrate $\boldsymbol{\mathcal{L}} : J^2(Z) \longrightarrow A^0_m(M)$. Il secondo utilizza forme orizzontali dicendo che una lagrangiana è una m–forma orizzontale $\boldsymbol{L} \in \boldsymbol{\mathcal{H}}^0_m(J^2(Z))$. Noi utilizzeremo di volta in volta il punto di vista che è più utile per dimostrare le proprietà che stiamo studiando.

In coordinate fibrate naturali si ha

$$\boldsymbol{\mathcal{L}} : (x^\alpha, z^i, z^i_\mu, z^i_{\mu\nu}) \longmapsto (x^\alpha, \hat{L}(x^\beta, z^i, z^i_\mu, z^i_{\mu\nu})) \tag{23}$$

e

$$\boldsymbol{L} = \hat{L}(x^\beta, z^i, z^i_\mu, z^i_{\mu\nu})ds \tag{24}$$

dove la funzione $\hat{L}(x^\beta, z^i, z^i_\mu, z^i_{\mu\nu})$ è una densità scalare di peso 1.

Il funzionale d'azione associata alla forma lagrangiana $\boldsymbol{L}$ è dato dagli integrali

$$\mathcal{A}_\Omega(\sigma) = \int_\Omega (j^2\sigma)^* \boldsymbol{L} = \int_\Omega \hat{L}(j^2_x\sigma)ds$$

dove σ è una sezione locale o globale della varietà fibrata $\zeta : Z \longrightarrow M$ e Ω è una sottovarietà con bordo compatta tale che $\Omega \subset \mathrm{Dom}(\sigma)$.

Risolvere il problema variazionale associato alla forma lagrangiana $\boldsymbol{L}$ consiste nello studiare i punti stazionari σ di tutti gli integrali d'azione $\mathcal{A}_\Omega(\cdot)$.

3.1 Variazione.

Per studiare i punti stazionari procediamo come abbiamo fatto per le lagrangiane del prim'ordine. Diciamo che $\bar{\sigma}$ è un punto stazionario per l'azione $\mathcal{A}_\Omega(\sigma)$ se ognuna delle funzioni $t \longmapsto \mathcal{A}_\Omega(\sigma_t)$ ha un punto stazionario in $t = 0$ o, visto che le funzioni $t \longmapsto \mathcal{A}_\Omega(\sigma_t)$ sono elementi di $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R};\mathbb{R})$, se si ha

$$\left.\frac{d\mathcal{A}_\Omega(\sigma_t)}{dt}\right|_{t=0} = 0$$

per ogni curva $t \longmapsto \sigma_t$ basata in $\bar{\sigma}$.

Se definiamo $\tilde{\sigma}^i(t, x^\alpha) = (\sigma_t)^i(x^\alpha)$, allora l'azione è

$$\mathcal{A}_\Omega(\sigma_t) = \int_\Omega (j^1\sigma_t)^*\boldsymbol{L} = \int_\Omega \hat{L}(x, \tilde{\sigma}^i(t,x), \partial_\mu\tilde{\sigma}^i(t,x), \partial_\mu\partial_\nu\tilde{\sigma}^i(t,x))ds$$

Calcolando

$$\delta\mathcal{A}_\Omega(\bar{\sigma}) = \left.\frac{d\mathcal{A}_\Omega(\sigma_t)}{dt}\right|_{t=0}$$

si ha

$$\delta\mathcal{A}_\Omega(\bar{\sigma}) = \int_\Omega \Big(\partial_k\hat{L}(j^2_x\bar{\sigma})\delta\bar{\sigma}^k(x) + \partial^\mu_k\hat{L}(j^2_x\bar{\sigma})\partial_\mu\delta\bar{\sigma}^k(x) + \partial^{\mu\nu}_k\hat{L}(j^2_x\bar{\sigma})\partial_\nu\partial_\mu\delta\bar{\sigma}^k(x)\Big)\, ds \tag{25}$$

e integrando per parti si ottiene

$$\begin{aligned}\delta\mathcal{A}_{\Omega}(\bar\sigma) &= \int_{\Omega}\partial_\mu\left\{\left[\partial_k^\mu\hat L(j^2_x\bar\sigma)-\partial_\nu\left(\partial_k^{\mu\nu}\hat L(j^2_x\bar\sigma)\right)\right]\delta\bar\sigma^k(x)+\partial_k^{\mu\nu}\hat L(j^2_x\bar\sigma)\partial_\nu\delta\bar\sigma^k(x)\right\}ds\\ &\quad+\int_{\Omega}\left\{\left[\partial_k\hat L(j^2_x\bar\sigma)-\partial_\mu\left(\partial_k^{\mu}\hat L(j^2_x\bar\sigma)\right)+\partial_\nu\partial_\mu\left(\partial_k^{\mu\nu}\hat L(j^2_x\bar\sigma)\right)\right]\delta\bar\sigma^k(x)\right\}ds \end{aligned}\tag{26}$$

$$\begin{aligned} &= \int_{\partial\Omega}\left\{\left[\partial_k^\mu\hat L(j^2_x\bar\sigma)-\partial_\nu\left(\partial_k^{\mu\nu}\hat L(j^2_x\bar\sigma)\right)\right]\delta\bar\sigma^k(x)+\partial_k^{\mu\nu}\hat L(j^2_x\bar\sigma)\partial_\nu\delta\bar\sigma^k(x)\right\}ds_\mu\\ &\quad+\int_{\Omega}\left\{\left[\partial_k\hat L(j^2_x\bar\sigma)-\partial_\mu\left(\partial_k^{\mu}\hat L(j^2_x\bar\sigma)\right)+\partial_\nu\partial_\mu\left(\partial_k^{\mu\nu}\hat L(j^2_x\bar\sigma)\right)\right]\delta\bar\sigma^k(x)\right\}ds \end{aligned}\tag{27}$$

3.2 Equazioni di Eulero–Lagrange.

Se nella (27) consideriamo solo le curve $t\longmapsto\sigma_t$ tali che $\delta\bar\sigma^k|_{\partial\Omega}=0$ e $(\partial_\mu\delta\bar\sigma^k)|_{\partial\Omega}=0$, possiamo dedurre che la condizione necessaria affinché $\delta\mathcal{A}_{\Omega}(\bar\sigma)=0$ è che la sezione $\bar\sigma$ sia una soluzione dell'equazione differenziale del quart'ordine

$$\partial_k\hat L(j^2_x\bar\sigma)-\partial_\mu\left(\partial_k^{\mu}\hat L(j^2_x\bar\sigma)\right)+\partial_\nu\partial_\mu\left(\partial_k^{\mu\nu}\hat L(j^2_x\bar\sigma)\right)=0\tag{28}$$

o, equivalentemente, una soluzione delle equazioni di Eulero–Lagrange

$$\left[\partial_k\hat L-d_\mu\left(\partial_k^\mu\hat L\right)+d_\nu d_\mu\left(\partial_k^{\mu\nu}\hat L\right)\right](j^4_x\bar\sigma)=0\,.\tag{29}$$

3.3 Forma di Poincaré–Cartan.

Anche per la forma lagrangiana del second'ordine (24), le equazioni di Eulero-Lagrange (28) e/o (29) si possono dedurre da una forma differenziale analoga alla forma di Poincaré–Cartan che c'è per le lagrangiane del prim'ordine.

In questo caso, la forma di Poincaré–Cartan sarà una m–forma $\boldsymbol{\Theta} \in \boldsymbol{\Omega}^m(J^3(Z))$ con le seguenti proprietà

1. per ogni sezione σ di Z su ha $(j^3\sigma)^*(\boldsymbol{\Theta}) = (j^2\sigma)^*(\boldsymbol{L})$,
2. deve essere $\boldsymbol{\Theta} \in \boldsymbol{\mathcal{H}}^0_m(J^3(Z)) \oplus \boldsymbol{\mathcal{H}}^1_{m-1}(J^3(Z))$ e deve anche essere anche orizzontale per la proiezione $\zeta^3_2 : J^3(Z) \longrightarrow J^2(Z)$,
3. il differenziale esterno $d\,\boldsymbol{\Theta}$ è una $(m+1)$–forma del tipo $d\,\boldsymbol{\Theta} \in \boldsymbol{\mathcal{K}}^1(J^1(Z)) \wedge \boldsymbol{\Omega}^m(J^3(Z))$.

Le condizioni 1 e 2 ci dicono che

$$\boldsymbol{\Theta} = \hat{L}\, ds + \left(\hat{F}^{\mu}_{k}\underline{\boldsymbol{\omega}}^k + \hat{F}^{\nu\mu}_{k}\underline{\boldsymbol{\omega}}^k_{\nu}\right) \wedge ds_{\mu} \tag{30}$$

e, quindi, il differenziale $d\boldsymbol{\Theta}$ sarà

$$\begin{aligned} d\boldsymbol{\Theta} &= d\hat{L} \wedge ds + \left(d\hat{F}^{\mu}_{k} \wedge \underline{\boldsymbol{\omega}}^k + d\hat{F}^{\nu\mu}_{k} \wedge \underline{\boldsymbol{\omega}}^k_{\nu}\right) \wedge ds_{\mu} - \left(\hat{F}^{\mu}_{k}\underline{\boldsymbol{\omega}}^k_{\mu} + \hat{F}^{\nu\mu}_{k}\underline{\boldsymbol{\omega}}^k_{\mu\nu}\right) \wedge ds \\ &= \left(\partial_k\hat{L}\,\underline{\boldsymbol{\omega}}^k + \partial^{\mu}_{k}\hat{L}\,\underline{\boldsymbol{\omega}}^k_{\mu} + \partial^{\mu\nu}_{k}\hat{L}\,\underline{\boldsymbol{\omega}}^k_{\mu\nu}\right) \wedge ds \end{aligned} \tag{31}$$

$$
\begin{aligned}
&\quad + \left(d\hat{F}_k^{\mu} \wedge \underline{\boldsymbol{\omega}}^k + d\hat{F}_k^{\nu\mu} \wedge \underline{\boldsymbol{\omega}}_\nu^k\right) \wedge ds_\mu - \left(\hat{F}_k^{\mu}\underline{\boldsymbol{\omega}}_\mu^k + \hat{F}_k^{\nu\mu}\underline{\boldsymbol{\omega}}_{\mu\nu}^k\right) \wedge ds \\
= &\quad \left(\partial_k^{\mu\nu}\hat{L} - \hat{F}_k^{(\nu\mu)}\right)\underline{\boldsymbol{\omega}}_{\mu\nu}^k \wedge ds \\
&\quad +\underline{\boldsymbol{\omega}}_\alpha^k \wedge \left(\left(\partial_k^{\alpha}\hat{L} - \hat{F}_k^{\alpha}\right) ds - d\hat{F}_k^{\alpha\mu} \wedge ds_\mu\right) \\
&\quad +\underline{\boldsymbol{\omega}}^k \wedge \left(\partial_k\hat{L}\, ds - d\hat{F}_k^{\mu} \wedge ds_\mu\right)
\end{aligned}
$$

I due termini $\partial_k^{\mu\nu}\hat{L}$ e $\hat{F}_k^{\mu\nu}$ si trasformano nello stesso modo e, quindi, possiamo chiedere che, globalmente, sia

$$\hat{F}_k^{\mu\nu} = \partial_k^{\mu\nu}\hat{L} + \hat{M}_k^{\mu\nu}$$

dove si è posto $\hat{M}_k^{\mu\nu} = \hat{F}_k^{[\mu\nu]}$. Se $\hat{F}_k^{\mu\nu} \in \mathfrak{F}(J^2(Z))$ e, quindi, anche $\hat{M}_k^{\mu\nu} \in \mathfrak{F}(J^2(Z))$ si ha

$$d\hat{F}_k^{\alpha\mu} \wedge ds_\mu = d_\mu\hat{F}_k^{\alpha\mu} ds + d_V(\hat{F}_k^{\alpha\mu}) \wedge ds_\mu$$

e

$$
\begin{aligned}
d\boldsymbol{\Theta} \;=\; & \underline{\boldsymbol{\omega}}_\alpha^k \wedge \left(\partial_k^{\alpha}\hat{L} - \hat{F}_k^{\alpha} - d_\mu\hat{F}_k^{\alpha\mu}\right) ds - \underline{\boldsymbol{\omega}}_\alpha^k \wedge d_V\hat{F}_k^{\alpha\mu} \wedge ds_\mu \\
& +\underline{\boldsymbol{\omega}}^k \wedge \left(\partial_k\hat{L}\, ds - d\hat{F}_k^{\mu} \wedge ds_\mu\right)
\end{aligned}
$$

Il termine $\underline{\boldsymbol{\omega}}_\alpha^k \wedge d_V\hat{F}_k^{\alpha\mu} \wedge ds_\mu \in \boldsymbol{\mathcal{H}}_{m-1}^2(J^3(Z))$ può essere tranquillamente ignorato e si può scegliere $\hat{F}_k^{\alpha}$ in modo tale che

$$\hat{F}_k^{\alpha} = \partial_k^{\alpha}\hat{L} - d_\mu\hat{F}_k^{\alpha\mu} = \partial_k^{\alpha}\hat{L} - d_\mu(\partial_k^{\alpha\mu}\hat{L}) - d_\mu\hat{M}_k^{\alpha\mu}$$

Si ha, quindi:

$$\boldsymbol{\Theta} = \hat{L}\, ds + \left\{ \left[\partial_k^{\mu} \hat{L} \, - d_{\alpha}(\partial_k^{\mu\alpha} \hat{L}) - d_{\mu} \hat{M}_k^{\mu\alpha} \right] \underline{\boldsymbol{\omega}}^k + \left[\partial_k^{\alpha\mu} \hat{L} + \hat{M}_k^{\alpha\mu} \right] \underline{\boldsymbol{\omega}}_{\alpha}^k \right\} \wedge ds_{\mu} \tag{32}$$

Come risultato, la m–forma

$$\boldsymbol{\Theta}_{\boldsymbol{L}} = \hat{L}\, ds + \left\{ \left[\partial_k^{\mu} \hat{L} \, - d_{\alpha}(\partial_k^{\mu\alpha} \hat{L}) \right] \underline{\boldsymbol{\omega}}^k + \partial_k^{\alpha\mu} \hat{L} \, \underline{\boldsymbol{\omega}}_{\alpha}^k \right\} \wedge ds_{\mu} \tag{33}$$

è l'unica forma (32) col coefficiente $\hat{F}_k^{\alpha\mu}$ simmetrico che soddisfa le condizioni richieste e sarà detta *forma di Poincaré–Cartan* della lagrangiana $\boldsymbol{\mathcal{L}}$ o della forma lagrangiana $\boldsymbol{L}$.

Consideriamo ora un campo di vettori $\vec{\Xi}^{(3)} \in \mathfrak{X}(J^3(Z))$ e calcoliamo il prodotto interno $\vec{\Xi}^{(3)} \rfloor \, d\boldsymbol{\Theta}_{\boldsymbol{L}}$ otteniamo

$$\vec{\Xi}^{(3)} \rfloor \, d\boldsymbol{\Theta}_{\boldsymbol{L}} \;\; = \;\; (\vec{\Xi}^{(3)} \rfloor \, \underline{\boldsymbol{\omega}}^k) \left(\partial_k \hat{L}\, ds - d\left(\hat{F}_k^{\mu} \right) \wedge ds_{\mu} \right) + \boldsymbol{\mathcal{K}}^1(J^3(Z)) \wedge \boldsymbol{\Omega}^{m-1}(J^3(Z)) \tag{34}$$

e, quindi, per ogni sezione σ della varietà fibrata Z, possiamo, quindi, affermare che σ è una soluzione delle equazioni di Eulero–Lagrange (29) se e solo se

$$(j^3\sigma)^* \left(\vec{\Xi}^{(3)} \rfloor \, d\boldsymbol{\Theta}_{\boldsymbol{L}} \right) = 0 \qquad \forall \, \vec{\Xi}^{(3)} \in \mathfrak{X}(J^3(Z)) \tag{35}$$

La condizione (35) è fin troppo generale, ma può essere alleggerita richiedendo che $\vec{\Xi}^{(3)}$ sia il prolungamento $J^3(\vec{\Xi})$ di un campo di vettori $\vec{\Xi} \in \mathfrak{X}(Z)$ o anche solo il prolungamento di un campo di vettori verticale $\vec{\Xi} \in \mathfrak{X}_{_V}(Z)$.

Esempio 3.1. [Lagrangiana del second'ordine con equazioni banali]

Data una lagrangiana del second'ordine $\hat{L}(x^\alpha, z^i, z^i_\mu, z^i_{\mu\nu})$ del tipo

$$\hat{L} = d_\mu \left(f^\mu(x^\alpha, z^i, z^i_\beta) \right) \;=\; \partial_\mu f^\mu + z^k_\mu \partial_k f^\mu + z^k_{\nu\mu} \partial^\nu_k f^\mu \tag{36}$$

si ha

$$\partial^{\alpha\sigma}_i \hat{L} \;=\; \partial^{(\alpha}_i f^{\sigma)} \tag{37}$$

$$\partial^\sigma_i \hat{L} \;=\; \partial_i f^\sigma + d_\mu(\partial^\sigma_i f^\mu) \tag{38}$$

$$\partial_i \hat{L} \;=\; d_\lambda \left(\partial_i f^\lambda \right) \tag{39}$$

Calcolando le componenti di una delle possibili forme di Poincaré–Cartan si ottiene

$$\begin{aligned}
\hat{F}^{\lambda\mu}_i &= \partial^{(\lambda}_i f^{\mu)} + \hat{M}^{\lambda\mu}_i & & (\hat{M}^{\mu\lambda}_i = -\hat{M}^{\lambda\mu}_i) \\
&= \partial^\mu_i f^\lambda - \partial^{[\mu}_i f^{\lambda]} + \hat{M}^{\lambda\mu}_i \\
&= \partial^\mu_i f^\lambda + \tilde{M}^{\lambda\mu}_i & & (\tilde{M}^{\mu\lambda}_i = -\tilde{M}^{\lambda\mu}_i) \qquad (40) \\
\hat{F}^\sigma_i &= \partial^\sigma_i \hat{L} - d_\lambda \left(\partial^\sigma_i f^\lambda \right) - d_\lambda \, \tilde{M}^{\lambda\sigma}_i \\
&= \partial_i f^\sigma + d_\mu(\partial^\sigma_i f^\mu) - d_\lambda \left(\partial^\sigma_i f^\lambda \right) - d_\lambda \, \tilde{M}^{\lambda\sigma}_i \\
&= \partial_i f^\sigma - d_\mu \, \tilde{M}^{\mu\sigma}_i \qquad (41) \\
\hat{E}_i &= \partial_i \hat{L} - d_\lambda \hat{F}^\lambda_i \\
&= d_\lambda \left(\partial_i f^\lambda \right) - d_\sigma \left(\partial_i f^\sigma - d_\mu \, \tilde{M}^{\mu\sigma}_i \right)
\end{aligned}$$

$$\equiv \quad 0 \tag{42}$$

Scegliendo $\hat{M}_i^{\lambda\mu} = \partial_i^{[\mu} f^{\lambda]}$, si ha $\tilde{M}_i^{\lambda\mu} = 0$ e, quindi, si ottiene la “forma di Poincaré–Cartan”

$$\Theta = (d_\lambda f^\lambda) ds + \left(\partial_i f^\lambda\right) \underline{\boldsymbol{\omega}}^i \wedge ds_\lambda + \left(\partial_i^\mu f^\lambda\right) \underline{\boldsymbol{\omega}}_\mu^i \wedge ds_\lambda \tag{43}$$

$$= (d_\lambda f^\lambda) ds + \left(\partial_i f^\lambda \underline{\boldsymbol{\omega}}^i + \partial_i^\mu f^\lambda \underline{\boldsymbol{\omega}}_\mu^i\right) \wedge ds_\lambda \tag{44}$$

$$= d_{{}_H} f^\lambda \wedge ds_\lambda + d_{{}_V} f^\lambda \wedge ds_\lambda \tag{45}$$

$$= d(f^\lambda ds_\lambda) \tag{46}$$

che è la controimmagine a $J^3(Z)$ di una m–forma esatta su $J^1(Z)$.

Esempio 3.2. [Lagrangiana del second’ordine con equazioni non quasi-lineari]

Consideriamo il caso in cui la base M è $\mathbb{R}^2$ mentre il fibrato Z è il fibrato banale $Z = \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$. Sul fibrato $J^2(Z)$, con coordinate locali $(x^1, x^2, z, z_1, z_2, z_{11}, z_{12}, z_{22})$, consideriamo la seguente lagrangiana

$$\hat{L} = \left(A(z_1^2 + z_2^2) + \frac{Kz}{z_1^2 + z_2^2}\right)(z_{11} z_{22} - z_{12}^2) + B(z) \tag{47}$$

dove $A, B : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ sono funzioni arbitrarie e $K \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Si dimostra facilmente che le equazioni di Eulero–Lagrange si riducono all’equazione

$$K \frac{z_{11} z_{22} - z_{12}^2}{z_1^2 + z_2^2} + \frac{dB(z)}{dz} = 0 \tag{48}$$

che non è quasi-lieare.

4 Lagrangiane del terz'ordine

La variazione dell'integrale d'azione

$$\mathcal{A}_{\Omega}(\sigma) = \int_{\Omega} (j^3\sigma)^* \boldsymbol{L} = \int_{\Omega} \hat{L}(j^3_x\sigma) ds$$

si può scrivere nel seguente modo

$$\delta\mathcal{A}_{\Omega}(\sigma) = \int_{\Omega} \delta\hat{L}\, ds$$

con $\delta\hat{L}$ definita dalla formula

$$\delta\hat{L} = \hat{p}_k\, \delta\sigma^k + \hat{p}_k^{\lambda}\, \delta\sigma^k_{\lambda} + \hat{p}_k^{\lambda\mu}\, \delta\sigma^k_{\lambda\mu} + \hat{p}_k^{\lambda\mu\nu}\, \delta\sigma^k_{\lambda\mu\nu}$$

dove si è posto

$$\begin{aligned} \hat{p}_k &= \partial_k\hat{L} \\ \hat{p}_k^{\lambda} &= \partial_k^{\lambda}\hat{L} \\ \hat{p}_k^{\lambda\mu} &= \partial_k^{\lambda\mu}\hat{L} \\ \hat{p}_k^{\lambda\mu\nu} &= \partial_k^{\lambda\mu\nu}\hat{L} \end{aligned}$$

La *formula della variazione prima* è

$$\hat{p}_k\, \delta\sigma^k + \hat{p}_k^{\lambda}\, \delta\sigma^k_{\lambda} + \hat{p}_k^{\lambda\mu}\, \delta\sigma^k_{\lambda\mu} + \hat{p}_k^{\lambda\mu\nu}\, \delta\sigma^k_{\lambda\mu\nu} = \hat{\boldsymbol{E}}_k(\hat{L})\, \delta\sigma^k + d_{\alpha}\big(\hat{\boldsymbol{F}}^{\alpha}(\hat{L})\big)$$

dove

$$\hat{\boldsymbol{F}}^{\alpha}(\hat{L}) \;=\; \hat{f}_k^{\alpha}\delta\sigma^k + \hat{f}_k^{\lambda\alpha}\delta\sigma_\lambda^k + \hat{f}_k^{\lambda\mu\alpha}\,\delta\sigma_{\lambda\mu}^k \tag{49}$$

$$\hat{f}_k^{\lambda\mu\alpha} \;=\; \hat{p}_k^{\lambda\mu\alpha} \tag{50}$$

$$\hat{f}_k^{\lambda\alpha} \;=\; \hat{p}_k^{\lambda\alpha} - d_\nu\big(\hat{f}_k^{\lambda\alpha\nu}\big) \;=\; \hat{p}_k^{\lambda\alpha} - d_\nu\big(\hat{p}_k^{\lambda\alpha\nu}\big) \tag{51}$$

$$\hat{f}_k^{\alpha} \;=\; \hat{p}_k^{\alpha} - d_\mu\big(\hat{f}_k^{\alpha\mu}\big) \;=\; \hat{p}_k^{\alpha} - d_\mu\big(\hat{p}_k^{\alpha\mu}\big) + d_\mu d_\nu\big(\hat{p}_k^{\alpha\mu\nu}\big) \tag{52}$$

$$\hat{\boldsymbol{E}}_k(\hat{L}) \;=\; \hat{p}_k - d_\alpha\big(\hat{f}_k^{\alpha}\big) \;=\; \hat{p}_k - d_\lambda\big(\hat{p}_k^{\lambda}\big) + d_\lambda d_\mu\big(\hat{p}_k^{\lambda\mu}\big) - d_\lambda d_\mu d_\nu\big(\hat{p}_k^{\lambda\mu\nu}\big) \tag{53}$$

Una forma di Poincaré–Cartan sarà una m–forma $\boldsymbol{\Theta} \in \boldsymbol{\mathcal{H}}_m^0(J^5(Z)) \oplus \boldsymbol{\mathcal{H}}_{m-1}^1(J^5(Z))$ del tipo

$$\boldsymbol{\Theta} \;=\; \hat{L}ds + \Big(\hat{F}_k^{\alpha}\,\underline{\boldsymbol{\omega}}^k + \hat{F}_k^{\lambda\alpha}\,\underline{\boldsymbol{\omega}}_\lambda^k + \hat{F}_k^{\lambda\mu\alpha}\,\underline{\boldsymbol{\omega}}_{\lambda\mu}^k\Big) \wedge ds_\alpha \tag{54}$$

dove i coefficienti sono tali che: $\hat{L}, \hat{F}_k^{\lambda\mu\alpha} \in \mathfrak{F}(J^3(Z))$, $\hat{F}_k^{\lambda\alpha} \in \mathfrak{F}(J^4(Z))$ e $\hat{F}_k^{\alpha} \in \mathfrak{F}(J^5(Z))$.

Calcolando il differenziale $d\,\boldsymbol{\Theta}$ si ottiene

$$d\,\boldsymbol{\Theta} \;=\; d\hat{L}\wedge ds - \Big(\hat{F}_k^{\alpha}\,\underline{\boldsymbol{\omega}}_\alpha^k + \hat{F}_k^{\lambda\alpha}\,\underline{\boldsymbol{\omega}}_{\lambda\alpha}^k + \hat{F}_k^{\lambda\mu\alpha}\,\underline{\boldsymbol{\omega}}_{\lambda\mu\alpha}^k\Big)\wedge ds \tag{55}$$

$$+\Big(d\,\hat{F}_k^{\alpha}\wedge\underline{\boldsymbol{\omega}}^k + d\,\hat{F}_k^{\lambda\alpha}\wedge\underline{\boldsymbol{\omega}}_\lambda^k + d\,\hat{F}_k^{\lambda\mu\alpha}\wedge\underline{\boldsymbol{\omega}}_{\lambda\mu}^k\Big)\wedge ds_\alpha \tag{56}$$

$$=\;\Big(d_V\hat{L} - \hat{F}_k^{\alpha}\,\underline{\boldsymbol{\omega}}_\alpha^k - \hat{F}_k^{\lambda\alpha}\,\underline{\boldsymbol{\omega}}_{\lambda\alpha}^k - \hat{F}_k^{\lambda\mu\alpha}\,\underline{\boldsymbol{\omega}}_{\lambda\mu\alpha}^k\Big)\wedge ds \tag{57}$$

$$+d\,\hat{F}_k^{\alpha}\wedge\underline{\boldsymbol{\omega}}^k\wedge ds_\alpha + \Big(d_H\,\hat{F}_k^{\lambda\alpha}\wedge\underline{\boldsymbol{\omega}}_\lambda^k + d_H\,\hat{F}_k^{\lambda\mu\alpha}\wedge\underline{\boldsymbol{\omega}}_{\lambda\mu}^k\Big)\wedge ds_\alpha \tag{58}$$

$$+\Big(d_V\,\hat{F}_k^{\lambda\alpha}\wedge\underline{\boldsymbol{\omega}}_\lambda^k + d_V\,\hat{F}_k^{\lambda\mu\alpha}\wedge\underline{\boldsymbol{\omega}}_{\lambda\mu}^k\Big)\wedge ds_\alpha \tag{59}$$

$$
\begin{aligned}
&= \left(\hat{p}_k \underline{\boldsymbol{\omega}}^k + (\hat{p}_k^{\alpha} - \hat{F}_k^{\alpha})\underline{\boldsymbol{\omega}}^k_{\alpha} + (\hat{p}_k^{\lambda\alpha} - \hat{F}_k^{\lambda\alpha})\underline{\boldsymbol{\omega}}^k_{\lambda\alpha} + (\hat{p}_k^{\lambda\mu\alpha} - \hat{F}_k^{\lambda\mu\alpha})\underline{\boldsymbol{\omega}}^k_{\lambda\mu\alpha}\right) \wedge ds && (60)\\
&\quad + d\,\hat{F}_k^{\alpha} \wedge \underline{\boldsymbol{\omega}}^k \wedge ds_{\alpha} - \left(d_{\sigma}\,\hat{F}_k^{\lambda\sigma} \wedge \underline{\boldsymbol{\omega}}^k_{\lambda} + d_{\sigma}\,\hat{F}_k^{\lambda\mu\sigma} \wedge \underline{\boldsymbol{\omega}}^k_{\lambda\mu}\right) \wedge ds && (61)\\
&\quad + \left(d_V\,\hat{F}_k^{\lambda\alpha} \wedge \underline{\boldsymbol{\omega}}^k_{\lambda} + d_V\,\hat{F}_k^{\lambda\mu\alpha} \wedge \underline{\boldsymbol{\omega}}^k_{\lambda\mu}\right) \wedge ds_{\alpha} && (62)\\
&= \underline{\boldsymbol{\omega}}^k \wedge \left(\hat{p}_k\, ds - d\,\hat{F}_k^{\alpha} \wedge ds_{\alpha}\right) + \left(\hat{p}_k^{\lambda} - \hat{F}_k^{\lambda} - d_{\sigma}\,\hat{F}_k^{\lambda\sigma}\right)\underline{\boldsymbol{\omega}}^k_{\lambda} \wedge ds && (63)\\
&\quad + \left(\hat{p}_k^{\lambda\mu} - \hat{F}_k^{\lambda\mu} - d_{\sigma}\,\hat{F}_k^{\lambda\mu\sigma}\right)\underline{\boldsymbol{\omega}}^k_{\lambda\mu} \wedge ds + \left(\hat{p}_k^{\lambda\mu\alpha} - \hat{F}_k^{\lambda\mu\alpha}\right)\underline{\boldsymbol{\omega}}^k_{\lambda\mu\alpha} \wedge ds && (64)\\
&\quad + \left(d_V\,\hat{F}_k^{\lambda\alpha} \wedge \underline{\boldsymbol{\omega}}^k_{\lambda} + d_V\,\hat{F}_k^{\lambda\mu\alpha} \wedge \underline{\boldsymbol{\omega}}^k_{\lambda\mu}\right) \wedge ds_{\alpha} && (65)\\
&= \underline{\boldsymbol{\omega}}^k \wedge \left(\hat{p}_k\, ds - d\,\hat{F}_k^{\alpha} \wedge ds_{\alpha}\right) + \left(\hat{p}_k^{\lambda} - \hat{F}_k^{\lambda} - d_{\sigma}\,\hat{F}_k^{\lambda\sigma}\right)\underline{\boldsymbol{\omega}}^k_{\lambda} \wedge ds && (66)\\
&\quad + \left(\hat{p}_k^{\lambda\mu} - \hat{F}_k^{(\lambda\mu)} - d_{\sigma}\,\hat{F}_k^{\lambda\mu\sigma}\right)\underline{\boldsymbol{\omega}}^k_{\lambda\mu} \wedge ds + \left(\hat{p}_k^{\lambda\mu\alpha} - \hat{F}_k^{(\lambda\mu\alpha)}\right)\underline{\boldsymbol{\omega}}^k_{\lambda\mu\alpha} \wedge ds && (67)\\
&\quad + \left(d_V\,\hat{F}_k^{\lambda\alpha} \wedge \underline{\boldsymbol{\omega}}^k_{\lambda} + d_V\,\hat{F}_k^{\lambda\mu\alpha} \wedge \underline{\boldsymbol{\omega}}^k_{\lambda\mu}\right) \wedge ds_{\alpha} && (68)
\end{aligned}
$$

Consideriamo ora un campo di vettori $\vec{\Xi}^{(5)} \in \mathfrak{X}(J^5(Z))$. Calcolando il prodotto interno $\vec{\Xi}^{(5)} \rfloor d\boldsymbol{\Theta_L}$ otteniamo

$$
\begin{aligned}
\vec{\Xi}^{(5)} \rfloor d\boldsymbol{\Theta_L} &= (\vec{\Xi}^{(5)} \rfloor \underline{\boldsymbol{\omega}}^k)\left(\partial_k \hat{L}\, ds - d\left(\hat{F}_k^{\mu}\right) \wedge ds_{\mu}\right) && (69)\\
&\quad + \left(\hat{p}_k^{\lambda} - \hat{F}_k^{\lambda} - d_{\sigma}\,\hat{F}_k^{\lambda\sigma}\right)(\vec{\Xi}^{(5)} \rfloor \underline{\boldsymbol{\omega}}^k_{\lambda})ds\\
&\quad + \left(\hat{p}_k^{\lambda\mu} - \hat{F}_k^{(\lambda\mu)} - d_{\sigma}\,\hat{F}_k^{\lambda\mu\sigma}\right)(\vec{\Xi}^{(5)} \rfloor \underline{\boldsymbol{\omega}}^k_{\lambda\mu})ds\\
&\quad + \left(\hat{p}_k^{\lambda\mu\alpha} - \hat{F}_k^{(\lambda\mu\alpha)}\right)(\vec{\Xi}^{(5)} \rfloor \underline{\boldsymbol{\omega}}^k_{\lambda\mu\alpha})ds\\
&\quad + \boldsymbol{\mathcal{K}}^1(J^5(Z)) \wedge \boldsymbol{\Omega}^{m-1}(J^5(Z))
\end{aligned}
$$

Se vogliamo poter affermare che una sezione sezione σ della varietà fibrata Z, è una soluzione delle equazioni di Eulero–Lagrange $\hat{\boldsymbol{E}}_k(\hat{L}) = 0$ della lagrangiana del terz'ordine $\hat{L}$ se e solo se

$$(j^5\sigma)^* \left(\vec{\Xi}^{(5)} \rfloor \, d\boldsymbol{\Theta_L}\right) = 0 \qquad \forall \, \vec{\Xi}^{(5)} \in \mathfrak{X}(J^5(Z)) \tag{70}$$

allora deve essere

$$\hat{F}_k^{(\lambda\mu\alpha)} = \hat{p}_k^{\lambda\mu\alpha} \tag{71}$$

$$\hat{F}_k^{(\lambda\mu)} = \hat{p}_k^{\lambda\mu} - d_\sigma \, \hat{F}_k^{\lambda\mu\sigma} \tag{72}$$

$$\hat{F}_k^{\lambda} = \hat{p}_k^{\lambda} - d_\mu \, \hat{F}_k^{\lambda\mu} \tag{73}$$

che risolta dà

$$\hat{F}_k^{\lambda\mu\alpha} = \hat{p}_k^{\lambda\mu\alpha} + \hat{X}_k^{\lambda\mu\alpha} \qquad (\hat{X}_k^{[\lambda\mu]\alpha} \equiv 0, \hat{X}_k^{(\lambda\mu\alpha)} \equiv 0) \tag{74}$$

$$\hat{F}_k^{\lambda\mu} = \hat{p}_k^{\lambda\mu} - d_\sigma \, \hat{p}_k^{\lambda\mu\sigma} - d_\sigma \, \hat{X}_k^{\lambda\mu\sigma} + \hat{Y}_k^{\lambda\mu} \qquad (\hat{Y}_k^{(\lambda\mu)} \equiv 0) \tag{75}$$

$$\hat{F}_k^{\lambda} = \hat{p}_k^{\lambda} - d_\mu \, \hat{p}_k^{\lambda\mu} + d_\mu \, d_\sigma \, \hat{p}_k^{\lambda\mu\sigma} + d_\mu \, d_\sigma \, \hat{X}_k^{\lambda\mu\sigma} + d_\mu \, \hat{Y}_k^{\lambda\mu} \tag{76}$$

La (76) ci dice che l'esperssione del morfismo di Eulero–Lagrange $\hat{\boldsymbol{E}}_k(\hat{L})$ sarà

$$\hat{\boldsymbol{E}}_k = \hat{p}_k - d_\lambda \, \hat{F}_k^{\lambda} \tag{77}$$

$$= \hat{p}_k - d_\lambda \, (\hat{p}_k^{\lambda} - d_\mu \, \hat{p}_k^{\lambda\mu} + d_\mu \, d_\sigma \, \hat{p}_k^{\lambda\mu\sigma} + d_\mu \, d_\sigma \, \hat{X}_k^{\lambda\mu\sigma} + d_\mu \, \hat{Y}_k^{\lambda\mu}) \tag{78}$$

$$= \hat{p}_k - (d_\lambda \, \hat{p}_k^{\lambda} - d_\lambda \, d_\mu \, \hat{p}_k^{\lambda\mu} + d_\lambda \, d_\mu \, d_\sigma \, \hat{p}_k^{\lambda\mu\sigma} + d_\lambda \, d_\mu \, d_\sigma \, \hat{X}_k^{\lambda\mu\sigma} + d_\lambda \, d_\mu \, \hat{Y}_k^{\lambda\mu}) \tag{79}$$

$$
\begin{aligned}
&= \hat{p}_k - d_\lambda\, \hat{p}_k^\lambda + d_\lambda\, d_\mu\, \hat{p}_k^{\lambda\mu} - d_\lambda\, d_\mu\, d_\sigma\, \hat{p}_k^{\lambda\mu\sigma} - d_\lambda\, d_\mu\, d_\sigma\, \hat{X}_k^{\lambda\mu\sigma} - d_\lambda\, d_\mu\, \hat{Y}_k^{\lambda\mu} && (80)\\
&= \hat{p}_k - d_\lambda\, \hat{p}_k^\lambda + d_\lambda\, d_\mu\, \hat{p}_k^{\lambda\mu} - d_\lambda\, d_\mu\, d_\sigma\, \hat{p}_k^{\lambda\mu\sigma} && (81)
\end{aligned}
$$

L'oggetto $\hat{X}_k^{\lambda\mu\sigma}$ può essere annullato, ma, in generale, $\hat{Y}_k^{\lambda\mu}$ non può essere identicamente nullo. Come dimostrato in [7], quando $\hat{X}_k^{\lambda\mu\sigma} \equiv 0$, una possibile $\hat{Y}_k^{\lambda\mu}$ per avere una forma $\boldsymbol{\Theta}$ globalmente ben definita si ottiene scegliendo

$$
\hat{Y}_k^{\mu\lambda} = \hat{p}_k^{\alpha\beta[\mu}\gamma^{\lambda]}_{\alpha\beta} = \tfrac{1}{2}\left(\hat{p}_k^{\alpha\beta\mu}\gamma^\lambda_{\alpha\beta} - \hat{p}_k^{\alpha\beta\lambda}\gamma^\mu_{\alpha\beta}\right)
$$

dove $\gamma^\alpha_{\beta\mu}$ è una connessione lineare simmetrica sulla varietà di base M.

Come nei casi precedenti, la condizione (70) è fin troppo generale, ma può essere alleggerita richiedendo che $\vec{\Xi}^{(5)}$ sia il prolungamento $J^5(\vec{\Xi})$ di un campo di vettori $\vec{\Xi} \in \mathfrak{X}(Z)$ o anche solo il prolungamento di un campo di vettori verticale $\vec{\Xi} \in \mathfrak{X}_V(Z)$.

Riferimenti bibliografici

[1] S. Kobayashi, K. Nomizu: *Foundations of Differential Geometry, Vol. I*; John Wiley & Sons, New York · Chichester · Brisbane · Toronto · Singapore, 1963.

[2] S. Kobayashi, K. Nomizu: *Foundations of Differential Geometry, Vol. II*; John Wiley & Sons, New York · Chichester · Brisbane · Toronto, 1969.

[3] J. Dieudonné: *Éléments d'analyse 1 / Fondements de l'analyse moderne*; Gauthier–Villars, Paris, 1969.

[4] J. Dieudonné: *Éléments d'analyse 3*; Gauthier–Villars, Paris, 1969.

[5] P.L. García–Pérez: *Connections and* 1*–jet Fiber Bundles*, Rend. Sem. Mat. Univ. Padova **47**, 227–242 (1972).

[6] D. Krupka: *Some geometric aspects of variational problems in fibred manifolds*, ..., (1973).

[7] M. Ferraris: *Fibered connections and global Poincaré-Cartan forms in higher-order calculus of variations*, Springer–Verlag, Berlin Heidelberg 1993; Differential geometry and its applications, Proc. Conf., Nové Město na Moravě/Czech. 1983, Pt. 2, 61-91 (1984).

[8] I. Kolář, P.W. Michor, J. Slovák: *Natural Operations in Differential Geometry*, Springer–Verlag, Berlin Heidelberg 1993.

[9] P.J. Olver: *Equivalence, Invariants and Symmetry*; Cambridge University Press, 1995.

[10] J. E. Marsden, T. Ratiu, R. Abraham: *Manifolds, tensor analysis and applications, Third Edition*; Springer–Verlag, 2001.

[11] M. Ferraris: *Appunti di agebra lineare, multilineare e tensori*; 2023.

[12] M. Ferraris: *Appunti di calcolo differenziale*; 2023.

[13] M. Ferraris: *Appunti di calcolo sulle varietà differenziabili*; 2023.

[14] M. Ferraris: *Appunti su gruppi di Lie e fibrati principali*; 2023.

[15] M. Ferraris: *Spazi di getti*; 2023.