# Appunti sulle equazioni di Einstein

Marco FERRARIS

Dipartimento di Matematica “Giuseppe Peano”
Università degli Studi di Torino

2023

**Sommario**

Molte delle formule più importanti, ma non tutte, sono indipendenti dalla dimensione della varietà e dalla segnatura della metrica. Quando, in dimensione 4, considereremo metriche lorentziane supporremo che la segnatura sia $(+,-,-,-)$ o $(-,-,-,+)$.

... ... ...

## 1 Lagrangiana del second'ordine di Hilbert

Le equazioni di A. Einstein, come vengono comunemente scritte oggi, che descrivono il campo gravitazionale e le sue interazioni con la materia sono equazioni del tipo

$$R_{\mu\nu} - \tfrac{1}{2} R g_{\mu\nu} = \kappa T_{\mu\nu} \tag{1}$$

dove le $g_{\mu\nu}$ sono le componenti di una metrica lorentziana (dimensione 4, $\det(g_{\alpha\beta}) < 0$, $\|g_{\alpha\beta}\| = \mathrm{diag}(+1, -1, -1, -1)$), $R_{\mu\nu}$ sono le componenti del tensore di Ricci della metrica $g_{\alpha\beta}$ e $R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}$ la curvatura scalare (o lo scalare di curvatura) di Ricci della metrica $g_{\alpha\beta}$. Il tensore doppio, simmetrico, covariante $T_{\mu\nu}$ è noto come *tensore di stress di Hilbert* o *tensore di energia momento di Hilbert* e descrive il modo in cui il potenziale $g_{\mu\nu}$ del campo gravitazionale interagisce con la materia. La costante dimensionale

$$\kappa = \frac{8\pi G}{c^4} \tag{2}$$

dove $G$ è la costante gravitazionale di Newton e $c$ è la velocità delle luce[1].

Alla fine del 1915, D. Hilbert pubblica un articolo [1] in cui si dimostra che le equazioni (1) si possono dedurre da un principio variazionale con una lagrangiana del second'ordine

$$\mathbf{L} = -\tfrac{1}{2\kappa} \sqrt{|\det(g_{\alpha\beta})|}\, R(g_{\mu\nu}, \partial g_{\mu\nu}, \partial^2 g_{\mu\nu}) + \mathbf{V}(g_{\alpha\beta}, \varphi, \partial\varphi) \tag{3}$$

[1] Cercheremo sempre di evitare di mettere costanti dimensionali uguali a 1.

globalmente ben definita e covariante[2].

### 1.1 Metodo di Palatini

Per dimostrare come funziona il procedimento sfrutteremo il *metodo di Palatini* che fu introdotto da A. Palatini in un lavoro [4] del 1919. Per prima cosa, Palatini dimostra[3] che, nell'ipotesi che le variazioni $\delta g_{\alpha\beta}$ siano le componenti di un tensore, la variazione dei simboli di Christoffel di seconda specie

$$\Gamma^{\alpha}{}_{\beta\mu} = \{^{\alpha}{}_{\beta\mu}\} = \tfrac{1}{2} g^{\alpha\sigma} \left(\partial_\beta g_{\sigma\mu} + \partial_\mu g_{\sigma\beta} - \partial_\sigma g_{\beta\mu}\right)$$

della metrica $g_{\alpha\beta}$ è un campo di tensori:

$$\delta\Gamma^{\alpha}{}_{\beta\mu} = \tfrac{1}{2} g^{\alpha\sigma} \left(\nabla_\beta \delta g_{\sigma\mu} + \nabla_\mu \delta g_{\sigma\beta} - \nabla_\sigma \delta g_{\beta\mu}\right) \tag{4}$$

che sta in $\boldsymbol{\mathcal{S}}^1_2(M)$. Sfruttando questo fatto, Palatini dimostra poi che la variazione del tensore di Riemann

$$R^{\alpha}{}_{\beta\mu\nu} = d_\mu \Gamma^{\alpha}{}_{\beta\nu} - d_\nu \Gamma^{\alpha}{}_{\beta\mu} + \Gamma^{\alpha}{}_{\sigma\mu}\Gamma^{\sigma}{}_{\beta\nu} - \Gamma^{\alpha}{}_{\sigma\nu}\Gamma^{\sigma}{}_{\beta\mu}$$

ha la seguente espressione

$$\delta R^{\alpha}{}_{\beta\mu\nu} = \nabla_\mu \delta\Gamma^{\alpha}{}_{\beta\nu} - \nabla_\nu \delta\Gamma^{\alpha}{}_{\beta\mu} \tag{5}$$

[2] Hilbert presupponeva di lavorare su una varietà lorentziana (dimensione 4 e $\det(g_{\alpha\beta}) < 0$), ma le equazioni che si ottengono hanno la stessa struttura in qualunque dimensione ed in qualunque segnatura della metrica

[3] Palatini dimostra la formula (4) in dimensione 4 e con metrica lorentziana, ma la formula non dipende dalla dimensione o dalla segnatura della metrica.

La variazione del tensore di Ricci

$$R_{\beta\nu} = R^{\alpha}{}_{\beta\alpha\nu} = \partial_\alpha \Gamma^{\alpha}{}_{\beta\nu} - \partial_\nu \Gamma^{\alpha}{}_{\beta\alpha} + \Gamma^{\alpha}{}_{\sigma\alpha}\Gamma^{\sigma}{}_{\beta\nu} - \Gamma^{\alpha}{}_{\sigma\nu}\Gamma^{\sigma}{}_{\beta\alpha} = d_\alpha U^{\alpha}_{\beta\nu} + \Gamma_\sigma \Gamma^{\sigma}{}_{\beta\nu} - \Gamma^{\alpha}{}_{\sigma\nu}\Gamma^{\sigma}{}_{\beta\alpha}$$

è data dalla seguente formula

$$\delta R_{\beta\nu} = \nabla_\alpha \delta\Gamma^{\alpha}{}_{\beta\nu} - \nabla_\nu \delta\Gamma^{\alpha}{}_{\beta\alpha} \tag{6}$$

Posto, infine,

$$U^{\alpha}_{\beta\nu} = \Gamma^{\alpha}{}_{\beta\nu} - \delta^{\alpha}_{(\nu}\Gamma^{\sigma}{}_{\beta)\sigma} = \Gamma^{\alpha}{}_{\beta\nu} - \tfrac{1}{2}\left(\delta^{\alpha}_{\nu}\Gamma^{\sigma}{}_{\beta\sigma} + \delta^{\alpha}_{\beta}\Gamma^{\sigma}{}_{\nu\sigma}\right) \tag{7}$$

si ottiene[4]

$$\delta R_{\beta\nu} = \nabla_\alpha \delta U^{\alpha}_{\beta\nu} \tag{8}$$

### 1.2 Variazione della lagrangiana gravitazionale di Hilbert

Il termine gravitazionale della lagrangiana (3) si può riscrivere nel seguente modo

$$\mathbf{L}_{_H}(j^2 g) = -\tfrac{1}{2\kappa}\sqrt{|\det(g_{\alpha\beta})|}\, R = -\tfrac{1}{2\kappa}\mathfrak{g}^{\beta\nu}R_{\beta\nu} \tag{9}$$

dove si è posto $\mathfrak{g}^{\beta\nu} = \sqrt{|\det(g_{\rho\sigma})|}\, g^{\beta\nu} = \sqrt{|g|}\, g^{\beta\nu}$.

[4] Ricordarsi che

$$\Gamma^{\sigma}{}_{\nu\sigma} = \tfrac{1}{2}g^{\alpha\sigma}d_\nu g_{\alpha\sigma} = d_\nu \ln\left(\sqrt{|g|}\right)\ , \qquad \delta\Gamma^{\sigma}{}_{\nu\sigma} = d_\nu\left(\frac{\delta g}{2\,g}\right) \qquad \text{e, quindi,} \qquad d_\beta\,\delta\Gamma^{\sigma}{}_{\nu\sigma} = d_\beta d_\nu\left(\frac{\delta g}{2\,g}\right)\ .$$

Calcolando ora la variazione della (9), si ottiene

$$\begin{aligned}
\delta\left(\mathfrak{g}^{\beta\nu}R_{\beta\nu}\right) &= \delta\mathfrak{g}^{\beta\nu}R_{\beta\nu} + \mathfrak{g}^{\beta\nu}\delta R_{\beta\nu} && (10)\\
&= \delta\mathfrak{g}^{\beta\nu}R_{\beta\nu} + \mathfrak{g}^{\beta\nu}\left(\nabla_\alpha \delta U^\alpha_{\beta\nu}\right) && (11)\\
&= \delta\mathfrak{g}^{\beta\nu}R_{\beta\nu} + \nabla_\alpha\left(\mathfrak{g}^{\beta\nu}\delta U^\alpha_{\beta\nu}\right) && (12)\\
&= \delta\mathfrak{g}^{\beta\nu}R_{\beta\nu} + d_\alpha\left(\mathfrak{g}^{\beta\nu}\delta U^\alpha_{\beta\nu}\right) && (13)\\
&= \sqrt{|g|}\left(R_{\beta\nu} - \tfrac{1}{2}Rg_{\beta\nu}\right)\delta g^{\beta\nu} + d_\alpha\left(\mathfrak{g}^{\beta\nu}\delta U^\alpha_{\beta\nu}\right) && (14)
\end{aligned}$$

da cui si deduce che le equazioni di Eulero–Lagrange nel vuoto sono

$$\sqrt{|g|}\left(R_{\beta\nu} - \tfrac{1}{2}Rg_{\beta\nu}\right) = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad R_{\beta\nu} - \tfrac{1}{2}Rg_{\beta\nu} = 0 \tag{15}$$

Se la dimensione di $M$ è maggiore di 2, allora le equazioni (15) sono equivalenti alle equazioni

$$R_{\beta\nu} = 0 \tag{16}$$

Non c'è alcun bisogno di simmetrizzare $R_{\beta\nu}$ nelle equazioni (15) e (16) perché sappiamo che il tensore di Ricci di una metrica è simmetrico.

### 1.3 Variazione della lagrangiana completa di Hilbert

Calcolando la variazione della lagrangiana (3) col metodo di Palatini si ottiene[5]

$$
\begin{aligned}
\delta\mathbf{L} &= -\tfrac{1}{2\kappa}\mathfrak{g}^{\beta\nu}\delta R_{\beta\nu} - \tfrac{1}{2\kappa}R_{\beta\nu}\delta\mathfrak{g}^{\beta\nu} + \delta\mathbf{V} \\
&= -\tfrac{1}{2\kappa}\mathfrak{g}^{\beta\nu}\nabla_\alpha\delta U^\alpha_{\beta\nu} - \tfrac{1}{2\kappa}R_{\beta\nu}\delta\mathfrak{g}^{\beta\nu} + \frac{1}{2}\left(t_{\beta\nu}\delta\mathfrak{g}^{\beta\nu} + t^\alpha_{\beta\nu}\delta\mathfrak{g}^{\beta\nu}_\alpha\right) + \mathbf{f}_a\delta\varphi^a + \mathbf{p}^\mu_a\delta\varphi^a_\mu \\
&= -\tfrac{1}{2\kappa}d_\alpha\left(\mathfrak{g}^{\beta\nu}\delta U^\alpha_{\beta\nu}\right) - \tfrac{1}{2\kappa}R_{\beta\nu}\delta\mathfrak{g}^{\beta\nu} + \frac{1}{2}\left(t_{\beta\nu}\delta\mathfrak{g}^{\beta\nu} + t^\alpha_{\beta\nu}\delta\mathfrak{g}^{\beta\nu}_\alpha\right) + \mathbf{f}_a\delta\varphi^a + \mathbf{p}^\mu_a\delta\varphi^a_\mu \\
&= \left[-\tfrac{1}{2\kappa}R_{\beta\nu} + \frac{1}{2}\left(t_{\beta\nu} - d_\alpha t^\alpha_{\beta\nu}\right)\right]\delta\mathfrak{g}^{\beta\nu} + \left(\mathbf{f}_a - d_\alpha\mathbf{p}^\alpha_a\right)\delta\varphi^a \\
&\quad + d_\alpha\left(-\tfrac{1}{2\kappa}\mathfrak{g}^{\beta\nu}\delta U^\alpha_{\beta\nu} + \frac{1}{2}t^\alpha_{\beta\nu}\delta\mathfrak{g}^{\beta\nu} + \mathbf{p}^\alpha_a\delta\varphi^a\right)
\end{aligned}
$$

Osserviamo che

1. gli oggetti $t^\alpha_{\beta\nu}$ sono le componenti di un tensore una volta controvariante, due volte covariante e simmetrico;

2. gli oggetti $t_{\beta\nu}$, che sono simmetrici, non sono le componenti di un tensore, ma $X_{\beta\nu} = t_{\beta\nu} - d_\alpha t^\alpha_{\beta\nu}$ sono le componenti di un tensore simmetrico due volte covariante;

3. gli oggetti $\mathbf{p}^\alpha_a$ sono le componenti di una quantità di tipo tensoriale;

[5] D'ora in avanti supporremo che $\mathbf{V} = \mathbf{V}(j^1 g, j^1\varphi)$ sia una densità lagrangiana covariante.

4. gli oggetti $\mathbf{f}_a$ non sono sono le componenti di una quantità di tipo tensoriale, ma gli oggetti $\mathbf{e}_a = \mathbf{f}_a - d_\alpha \mathbf{p}_a^\alpha$ sono le componenti di una quantità di tipo tensoriale.

In dimensione $> 2$, le equazioni di Eulero Lagrange sono

$$-\frac{1}{\kappa} R_{\beta\nu} + X_{\beta\nu} = 0 \tag{17}$$

$$\mathbf{e}_a = \mathbf{f}_a - d_\alpha \mathbf{p}_a^\alpha = 0 \tag{18}$$

L'equazione (17) può essere rimpiazzata dall'equazione equivalente[6]

$$R_{\beta\nu} - \tfrac{1}{2} R g_{\beta\nu} = \kappa \overset{h}{T}_{\beta\nu} \tag{19}$$

dove il tensore di stress di Hilbert è definito da

$$\overset{h}{T}_{\beta\nu} = X_{\beta\nu} - \tfrac{1}{2} X\, g_{\beta\nu} \qquad \text{con} \qquad X = g^{\rho\sigma} X_{\rho\sigma}\,. \tag{20}$$

## 2 Lagrangiana non covariante del prim'ordine di Einstein

Nel lavoro [3] del 1916, Einstein considera un principio variazionale basato su una lagrangiana del prim'ordine, che però dipende dal sistema di coordinate, ma che riproduce le stesse equazioni di

[6] che vale in qualunque dimensione

Eulero–Lagrange della lagrangiana di Hilbert (3). Questo è possibile perché si ha

$$\begin{aligned} \mathbf{U}(j^1 g, j^1\varphi) &= \mathbf{L}(j^2 g, j^1\varphi) + \tfrac{1}{2\kappa} d_\alpha \left[\mathfrak{g}^{\beta\nu} U^{\alpha}_{\beta\nu}(j^1 g)\right] & (21)\\ &= \tfrac{1}{2\kappa}\mathfrak{g}^{\beta\nu}\left[\Gamma^{\alpha}_{\sigma\alpha}(j^1 g)\Gamma^{\sigma}_{\beta\nu}(j^1 g) - \Gamma^{\alpha}_{\sigma\nu}(j^1 g)\Gamma^{\sigma}_{\beta\alpha}(j^1 g)\right] + \mathbf{V}(j^1 g, j^1\varphi) & (22)\end{aligned}$$

e, quindi, le equazioni di Eulero–Lagrange che si ottengono dalla $\mathbf{L}(j^2 g, j^1\varphi)$ sono le stesse che si ottengono dalla $\mathbf{U}(j^1 g, j^1\varphi)$.

### 2.1 Variazione della lagrangiana gravitazionale di Einstein

La parte puramente gravitazionale della Lagrangiana (21) è:

$$\begin{aligned} \mathbf{U}_{E}(j^1 g) &= \mathbf{L}_{H}(j^2 g) + \tfrac{1}{2\kappa} d_\alpha \left(\mathfrak{g}^{\beta\nu} U^{\alpha}_{\beta\nu}\right) & (23)\\ &= -\tfrac{1}{2\kappa}\mathfrak{g}^{\beta\nu} R_{\beta\nu} + \tfrac{1}{2\kappa} d_\alpha \left(\mathfrak{g}^{\beta\nu} U^{\alpha}_{\beta\nu}\right) & (24)\\ &= \tfrac{1}{2\kappa}\mathfrak{g}^{\beta\nu}\left(\Gamma^{\alpha}_{\sigma\alpha}\Gamma^{\sigma}_{\beta\nu} - \Gamma^{\alpha}_{\sigma\nu}\Gamma^{\sigma}_{\beta\alpha}\right) & (25)\\ &= \tfrac{1}{2\kappa}\mathfrak{g}^{\beta\nu}\left(R_{\beta\nu} - d_\alpha U^{\alpha}_{\beta\nu}\right) \end{aligned}$$

e dalla (13) otteniamo

$$\begin{aligned}
\delta\mathbf{U}_{_E}(j^1g) &= \delta\left[\tfrac{1}{2\kappa}\,\mathfrak{g}^{\beta\nu}\left(\Gamma^\alpha_{\sigma\alpha}\Gamma^\sigma_{\beta\nu}-\Gamma^\alpha_{\sigma\nu}\Gamma^\sigma_{\beta\alpha}\right)\right] &(26)\\
&= \delta\left[\mathbf{L}_{_H}(j^2g)+\tfrac{1}{2\kappa}d_\alpha\left(\mathfrak{g}^{\beta\nu}U^\alpha_{\beta\nu}\right)\right] &(27)\\
&= \delta\mathbf{L}_{_H}(j^2g)+\tfrac{1}{2\kappa}d_\alpha\left[\mathfrak{g}^{\beta\nu}\delta U^\alpha_{\beta\nu}+U^\alpha_{\beta\nu}\delta\mathfrak{g}^{\beta\nu}\right] &(28)\\
&= -\tfrac{1}{2\kappa}R_{\beta\nu}\delta\mathfrak{g}^{\beta\nu}+\tfrac{1}{2\kappa}d_\alpha\left(U^\alpha_{\beta\nu}\delta\mathfrak{g}^{\beta\nu}\right) &(29)\\
&= \tfrac{1}{2\kappa}\left(d_\alpha U^\alpha_{\beta\nu}-R_{\beta\nu}\right)\delta\mathfrak{g}^{\beta\nu}+\tfrac{1}{2\kappa}U^\alpha_{\beta\nu}\delta\mathfrak{g}^{\beta\nu}_\alpha &(30)
\end{aligned}$$

da cui si deduce che le equazioni di Eulero–Lagrange sono ancora le equazioni (15).

### 2.2 Variazione della lagrangiana completa di Einstein

Calcolando la variazione della lagrangiana (22) si ottiene

$$\begin{aligned}
\delta\mathbf{U}(j^1g,j^1\varphi) &= \delta\mathbf{L}(j^2g,j^1\varphi)+\tfrac{1}{2\kappa}d_\alpha\left[\mathfrak{g}^{\beta\nu}\delta U^\alpha_{\beta\nu}+U^\alpha_{\beta\nu}\delta\mathfrak{g}^{\beta\nu}\right]\\
&= \tfrac{1}{2\kappa}d_\alpha\left(U^\alpha_{\beta\nu}\delta\mathfrak{g}^{\beta\nu}\right)-\tfrac{1}{2\kappa}R_{\beta\nu}\delta\mathfrak{g}^{\beta\nu}+\tfrac{1}{2\kappa}\left(t_{\beta\nu}\delta\mathfrak{g}^{\beta\nu}+t^\alpha_{\beta\nu}\delta\mathfrak{g}^{\beta\nu}_\alpha\right)+\mathbf{f}_a\delta\varphi^a+\mathbf{p}^\mu_a\delta\varphi^a_\mu\\
&= \tfrac{1}{2\kappa}\left(d_\alpha U^\alpha_{\beta\nu}-R_{\beta\nu}\right)\delta\mathfrak{g}^{\beta\nu}+\tfrac{1}{2\kappa}U^\alpha_{\beta\nu}\delta\mathfrak{g}^{\beta\nu}_\alpha+\tfrac{1}{2\kappa}\left(t_{\beta\nu}\delta\mathfrak{g}^{\beta\nu}+t^\alpha_{\beta\nu}\delta\mathfrak{g}^{\beta\nu}_\alpha\right)+\mathbf{f}_a\delta\varphi^a+\mathbf{p}^\mu_a\delta\varphi^a_\mu\\
&= \tfrac{1}{2\kappa}\left(d_\alpha U^\alpha_{\beta\nu}-R_{\beta\nu}+t_{\beta\nu}\right)\delta\mathfrak{g}^{\beta\nu}+\tfrac{1}{2\kappa}\left(U^\alpha_{\beta\nu}+t^\alpha_{\beta\nu}\right)\delta\mathfrak{g}^{\beta\nu}_\alpha+\mathbf{f}_a\delta\varphi^a+\mathbf{p}^\mu_a\delta\varphi^a_\mu\\
&= \tfrac{1}{2\kappa}\left(-R_{\beta\nu}+t_{\beta\nu}-d_\alpha t^\alpha_{\beta\nu}\right)\delta\mathfrak{g}^{\beta\nu}+\left(\mathbf{f}_a-d_\mu\mathbf{p}^\mu_a\right)\delta\varphi^a+d_\sigma\left[\tfrac{1}{2\kappa}\left(U^\sigma_{\beta\nu}+t^\sigma_{\beta\nu}\right)\delta\mathfrak{g}^{\beta\nu}+\mathbf{p}^\sigma_a\delta\varphi^a\right]
\end{aligned}$$

da cui si deduce che le equazioni di Eulero–Lagrange sono ancora le equazioni (17) e (18) (oppure (19) e (18)).

## 3 Forma di Poincaré–Cartan per le lagrangiane di Einstein e di Hilbert

La forma di Poincaré–Cartan $\Theta_{_E}$ della lagrangiana $\mathbf{U}_{_E}$ è

$$\begin{aligned}
\Theta_{_E} &= \mathbf{U}_{_E} ds + \tfrac{1}{2\kappa} U^{\alpha}_{\beta\nu} d_V \mathfrak{g}^{\beta\nu} \wedge ds_\alpha && (31)\\
&= \left(\mathbf{U}_{_E} - \tfrac{1}{2\kappa} U^{\alpha}_{\beta\nu} \mathfrak{g}^{\beta\nu}_{\alpha}\right) ds + \tfrac{1}{2\kappa} U^{\alpha}_{\beta\nu} d\mathfrak{g}^{\beta\nu} \wedge ds_\alpha && (32)\\
&= -\mathbf{U}_{_E} ds + \tfrac{1}{2\kappa} U^{\alpha}_{\beta\nu} d\mathfrak{g}^{\beta\nu} \wedge ds_\alpha && (33)
\end{aligned}$$

e si ha

$$\begin{aligned}
d\Theta_{_E} &= d\mathbf{U}_{_E} \wedge ds + \tfrac{1}{2\kappa} dU^{\alpha}_{\beta\nu} \wedge d_V \mathfrak{g}^{\beta\nu} \wedge ds_\alpha + \tfrac{1}{2\kappa} U^{\alpha}_{\beta\nu} d\, d_V \mathfrak{g}^{\beta\nu} \wedge ds_\alpha && (34)\\
&= \tfrac{1}{2\kappa} \left(d_\alpha U^{\alpha}_{\beta\nu} - R_{\beta\nu}\right) d\mathfrak{g}^{\beta\nu} \wedge ds + \tfrac{1}{2\kappa} U^{\alpha}_{\beta\nu} d\mathfrak{g}^{\beta\nu}_{\alpha} \wedge ds - \tfrac{1}{2\kappa} d_\alpha U^{\alpha}_{\beta\nu}\, d_V \mathfrak{g}^{\beta\nu} \wedge ds && (35)\\
&\quad + \tfrac{1}{2\kappa} d_V U^{\alpha}_{\beta\nu} \wedge d_V \mathfrak{g}^{\beta\nu} \wedge ds_\alpha - \tfrac{1}{2\kappa} U^{\alpha}_{\beta\nu} d\mathfrak{g}^{\beta\nu}_{\alpha} \wedge ds && (36)\\
&= -\tfrac{1}{2\kappa} R_{\beta\nu}\, d_V \mathfrak{g}^{\beta\nu} \wedge ds + \tfrac{1}{2\kappa} d_V U^{\alpha}_{\beta\nu} \wedge d_V \mathfrak{g}^{\beta\nu} \wedge ds_\alpha && (37)
\end{aligned}$$

Partendo dall'identità

$$\begin{aligned}
\mathbf{U}_{_E} ds &= -\tfrac{1}{2\kappa} \mathfrak{g}^{\beta\nu} R_{\beta\nu} ds + \tfrac{1}{2\kappa} d_\alpha \left(\mathfrak{g}^{\beta\nu} U^{\alpha}_{\beta\nu}\right) ds\\
&= \mathbf{L}_{_H} ds + \tfrac{1}{2\kappa} d_{_H} \left(\mathfrak{g}^{\beta\nu} U^{\alpha}_{\beta\nu}\right) \wedge ds_\alpha
\end{aligned}$$

si ottiene

$$\begin{aligned}\Theta_{E} &= \mathbf{L}_{H} ds + \tfrac{1}{2\kappa} d_{H}\left(\mathfrak{g}^{\beta\nu} U^{\alpha}_{\beta\nu}\right) \wedge ds_{\alpha} + \tfrac{1}{2\kappa} U^{\alpha}_{\beta\nu} d_{V} \mathfrak{g}^{\beta\nu} \wedge ds_{\alpha} \\ &= \mathbf{L}_{H} ds + \tfrac{1}{2\kappa} d\left(\mathfrak{g}^{\beta\nu} U^{\alpha}_{\beta\nu}\right) \wedge ds_{\alpha} - \tfrac{1}{2\kappa} d_{V}\left(\mathfrak{g}^{\beta\nu} U^{\alpha}_{\beta\nu}\right) \wedge ds_{\alpha} + \tfrac{1}{2\kappa} U^{\alpha}_{\beta\nu} d_{V} \mathfrak{g}^{\beta\nu} \wedge ds_{\alpha} \\ &= \mathbf{L}_{H} ds + \tfrac{1}{2\kappa} d\left(\mathfrak{g}^{\beta\nu} U^{\alpha}_{\beta\nu} ds_{\alpha}\right) - \tfrac{1}{2\kappa}\left(\mathfrak{g}^{\beta\nu} d_{V} U^{\alpha}_{\beta\nu}\right) \wedge ds_{\alpha}\end{aligned}$$

Definiamo la $m$–forma

$$\begin{aligned}\Theta_{H} &= \mathbf{L}_{H} ds - \tfrac{1}{2\kappa}\left(\mathfrak{g}^{\beta\nu} d_{V} U^{\alpha}_{\beta\nu}\right) \wedge ds_{\alpha} && (38)\\ &= \Theta_{E} - \tfrac{1}{2\kappa} d\left(\mathfrak{g}^{\beta\nu} U^{\alpha}_{\beta\nu} ds_{\alpha}\right) && (39)\\ &= -\mathbf{U}_{E} ds - \tfrac{1}{2\kappa} \mathfrak{g}^{\beta\nu} dU^{\alpha}_{\beta\nu} \wedge ds_{\alpha} && (40)\end{aligned}$$

che formalmente sarebbe definita su $J^2\mathring{S}^0_2(M)$, ma che è la controimmagine di una $m$–forma su $J^1\mathring{S}^0_2(M)$. Calcolando il differenziale $d(\Theta_{H})$ su $J^2\mathring{S}^0_2(M)$ si ha

$$\begin{aligned}d(\Theta_{H}) &= -\tfrac{1}{2\kappa} R_{\beta\nu} d_{V} \mathfrak{g}^{\beta\nu} \wedge ds + \tfrac{1}{2\kappa} d_{V} U^{\alpha}_{\beta\nu} \wedge d_{V} \mathfrak{g}^{\beta\nu} \wedge ds_{\alpha} && (41)\\ &= -\tfrac{1}{2\kappa} R_{\beta\nu} d\mathfrak{g}^{\beta\nu} \wedge ds + \tfrac{1}{2\kappa} d_{V} U^{\alpha}_{\beta\nu} \wedge d_{V} \mathfrak{g}^{\beta\nu} \wedge ds_{\alpha} && (42)\end{aligned}$$

Per verificare se la $m$–forma $\Theta_{H}$ è la forma di Poincaré–Cartan canonica della lagrangiana del second'ordine $\mathbf{L}_{H}$ bisogna studiare il termine $\mathfrak{g}^{\beta\nu} d_{V} U^{\alpha}_{\beta\nu} \wedge ds_{\alpha}$

$$\begin{aligned}\mathfrak{g}^{\beta\nu} d_{V} U^{\alpha}_{\beta\nu} \wedge ds_{\alpha} &= \mathfrak{g}^{\beta\nu}\left(d_{V} \Gamma^{\alpha}{}_{\beta\nu} - \tfrac{1}{2}\left(\delta^{\alpha}_{\beta} d_{V} \Gamma_{\nu} + \delta^{\alpha}_{\nu} d_{V} \Gamma_{\beta}\right)\right) \wedge ds_{\alpha} && (43)\\ &= \left(\mathfrak{g}^{\beta\nu} d_{V} \Gamma^{\alpha}{}_{\beta\nu} - \mathfrak{g}^{\alpha\nu} d_{V} \Gamma_{\nu}\right) \wedge ds_{\alpha} && (44)\end{aligned}$$

dove i differenziali verticali $d_{_V}\Gamma^{\alpha}{}_{\beta\nu}$ e $d_{_V}\Gamma_{\nu}$ hanno le seguenti espressioni

$$\begin{aligned} d_{_V}\Gamma^{\alpha}{}_{\beta\nu} &= \tfrac{1}{2}g^{\alpha\sigma}\left(d_{_V}g_{\sigma\beta,\nu} + d_{_V}g_{\sigma\nu,\beta} - d_{_V}g_{\beta\nu,\sigma}\right) - g^{\alpha\lambda}\Gamma^{\mu}{}_{\beta\nu}d_{_V}g_{\lambda\mu} && (45)\\ d_{_V}\Gamma_{\nu} &= \tfrac{1}{2}g^{\rho\sigma}d_{_V}g_{\rho\sigma,\nu} - g^{\alpha\lambda}\Gamma^{\mu}{}_{\alpha\nu}d_{_V}g_{\lambda\mu} && (46)\end{aligned}$$

Di conseguenza si ha:

$$\begin{aligned} \mathfrak{g}^{\beta\nu}d_{_V}U^{\alpha}_{\beta\nu} &= \sqrt{|g|}g^{\beta\nu}\left(d_{_V}\Gamma^{\alpha}{}_{\beta\nu} - \tfrac{1}{2}\left(\delta^{\alpha}_{\beta}d_{_V}\Gamma_{\nu} + \delta^{\alpha}_{\nu}d_{_V}\Gamma_{\nu}\right)\right) && (47)\\ &= \sqrt{|g|}\left(g^{\beta\nu}\tfrac{1}{2}g^{\alpha\sigma}\left(d_{_V}g_{\sigma\beta,\nu} + d_{_V}g_{\sigma\nu,\beta} - d_{_V}g_{\beta\nu,\sigma}\right) - g^{\alpha\lambda}\Gamma^{\mu}{}_{\beta\nu}d_{_V}g_{\lambda\mu}\right) && (48)\\ &\quad -\sqrt{|g|}g^{\alpha\nu}\left(\tfrac{1}{2}g^{\rho\sigma}d_{_V}g_{\rho\sigma,\nu} - g^{\rho\lambda}\Gamma^{\mu}{}_{\rho\nu}d_{_V}g_{\lambda\mu}\right) && (49)\\ &= \tfrac{1}{2}\sqrt{|g|}\left(g^{\beta\nu}g^{\alpha\sigma}d_{_V}g_{\sigma\beta,\nu} + g^{\beta\nu}g^{\alpha\sigma}d_{_V}g_{\sigma\nu,\beta} - g^{\beta\nu}g^{\alpha\sigma}d_{_V}g_{\beta\nu,\sigma} + \ldots\right) && (50)\\ &\quad +\tfrac{1}{2}\sqrt{|g|}\left(-g^{\alpha\nu}g^{\rho\sigma}d_{_V}g_{\rho\sigma,\nu} + \ldots\right) && (51)\\ &= \tfrac{1}{2}\sqrt{|g|}\left(g^{bn}g^{a\alpha}d_{_V}g_{ab,n} + g^{nb}g^{a\alpha}d_{_V}g_{ab,n} - g^{ab}g^{n\alpha}d_{_V}g_{ab,n} + \ldots\right) && (52)\\ &\quad +\tfrac{1}{2}\sqrt{|g|}\left(-g^{n\alpha}g^{ab}d_{_V}g_{ab,n} + \ldots\right) && (53)\\ &= \tfrac{1}{2}\sqrt{|g|}\left(g^{bn}g^{a\alpha}d_{_V}g_{ab,n} + g^{nb}g^{a\alpha}d_{_V}g_{ab,n} - 2\,g^{ab}g^{n\alpha}d_{_V}g_{ab,n}\right) + \ldots && (54)\\ &= \tfrac{1}{2}\sqrt{|g|}\left(g^{nb}g^{a\alpha} + g^{na}g^{b\alpha} - 2\,g^{ab}g^{n\alpha}\right)d_{_V}g_{ab,n} + \ldots && (55)\end{aligned}$$

I coefficienti $P^{abn\alpha} = g^{nb}g^{a\alpha} + g^{na}g^{b\alpha} - 2\,g^{ab}g^{n\alpha}$ sono simmetrici rispetto agli indici $a, b$, come deve essere, e sono anche simmetrici rispetto agli indici $n, \alpha$. Questo fatto ci assicura che la $m$–forma $\Theta_{_H}$ è la forma di Poincaré–Cartan canonica della lagrangiana del second'ordine $\mathbf{L}_{_H}$.

Le formule (38) e (39) ci dicono che $\Theta_{_H}$ è la controimmagine su $J^2\mathring{S}^0_2(M)$ della $m$–forma

$$\Theta_{_E} - \tfrac{1}{2\kappa} d\left(\mathfrak{g}^{\beta\nu} U^{\alpha}_{\beta\nu} ds_\alpha\right) = -\mathbf{U}_{_E} ds - \tfrac{1}{2\kappa}\mathfrak{g}^{\beta\nu} dU^{\alpha}_{\beta\nu} \wedge ds_\alpha \tag{56}$$

che è definita su su $J^1\mathring{S}^0_2(M)$ (vedere [8] per una dimostrazione alternativa in dimensione 4).

# 4 Lagrangiane materiali

## 4.1 Lagrangiana materiale per la costante cosmologica

La lagrangiana "materiale" per le equazioni di Einstein con costante cosmologica è

$$\mathbf{V}_{_\Lambda}(g_{\alpha\beta}) = -\tfrac{1}{\kappa}\Lambda\sqrt{|g|} \tag{57}$$

La variazione della lagrangiana materiale è

$$\delta\mathbf{V}_{_\Lambda} = -\tfrac{1}{\kappa}\Lambda\delta\sqrt{|g|} = \tfrac{1}{2\kappa}\Lambda\sqrt{|g|} g_{\rho\sigma}\delta g^{\rho\sigma} \tag{58}$$

ed il tensore di stress di Hilbert è

$$\overset{h}{T}_{\rho\sigma} = \tfrac{1}{\kappa}\Lambda g_{\rho\sigma} \tag{59}$$

Le equazioni di Einstein con costante cosmologica sono quindi

$$R_{\rho\sigma} - \tfrac{1}{2} R g_{\rho\sigma} = \Lambda g_{\rho\sigma} \tag{60}$$

### 4.2 Lagrangiana materiale per campi scalari (Klein–Gordon)

Uno dei casi più semplici di lagrangiane materiali $\mathbf{V}(g_{\alpha\beta}, \varphi, \partial\varphi)$ è quello della lagrangiana per un campo scalare che soddisfi ad un'equazione del tipo equazione di Laplace $\Delta\varphi = 0$, oppure equazione di Poisson $\Delta\varphi = f(\varphi)$, dove l'operatore $\Delta$ è definito da[7]

$$\Delta\varphi = g^{\alpha\beta}\nabla_\alpha\nabla_\beta\varphi$$

e $g_{\alpha\beta}$ sono le componenti di una metrica riemanniana o pseudo–riemanniana su una varietà $M$. La lagrangiana materiale è una lagrangiana covariante del tipo

$$\mathbf{V}_{\text{KG}}(g_{\alpha\beta}, \varphi, \partial\varphi) = \sqrt{|g|}\left(\tfrac{1}{2}g^{\alpha\beta}\varphi_\alpha\varphi_\beta + U(\varphi)\right) \tag{61}$$

La variazione della lagrangiana materiale è

$$\begin{aligned}
\delta\mathbf{V}_{\text{KG}}(g_{\alpha\beta}, \varphi, \partial\varphi) &= \delta\sqrt{|g|}\left(\tfrac{1}{2}g^{\alpha\beta}\varphi_\alpha\varphi_\beta + U(\varphi)\right) + \sqrt{|g|}\delta\left(\tfrac{1}{2}g^{\alpha\beta}\varphi_\alpha\varphi_\beta + U(\varphi)\right) && (62)\\
&= -\tfrac{1}{2}\sqrt{|g|}\left(\tfrac{1}{2}g^{\alpha\beta}\varphi_\alpha\varphi_\beta + U(\varphi)\right)g_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu} && (63)\\
&\quad + \sqrt{|g|}\left(g^{\alpha\beta}\varphi_\alpha\delta\varphi_\beta + \tfrac{1}{2}\varphi_\mu\varphi_\nu\delta g^{\mu\nu} + U'(\varphi)\delta\varphi\right) && (64)\\
&= \sqrt{|g|}\left[\tfrac{1}{2}\varphi_\mu\varphi_\nu - \tfrac{1}{2}\left(\tfrac{1}{2}g^{\alpha\beta}\varphi_\alpha\varphi_\beta + U(\varphi)\right)g_{\mu\nu}\right]\delta g^{\mu\nu} && (65)\\
&\quad + \nabla_\beta\left(\sqrt{|g|}g^{\alpha\beta}\varphi_\alpha\delta\varphi\right) + \sqrt{|g|}\left[U'(\varphi) - \nabla_\beta\left(g^{\alpha\beta}\varphi_\alpha\right)\right]\delta\varphi && (66)
\end{aligned}$$

[7] Se la metrica è una metrica lorentziana su una varietà di dimensione 4, l'operatore $\Delta$ viene indicato con $\Box$, o $-\Box$, ed è chiamato *Dalambertiano*.

Siccome la metrica della varietà $M$ è fissata, $\delta g^{\mu\nu} = 0$ e si ha

$$\delta \mathbf{V}_{\text{KG}}(g_{\alpha\beta}, \varphi, \partial\varphi) = d_\beta \left( \sqrt{|g|} g^{\alpha\beta} \varphi_\alpha \delta\varphi \right) + \sqrt{|g|} \left[ U'(\varphi) - g^{\alpha\beta} \nabla_\beta \nabla_\alpha \varphi \right] \delta\varphi \tag{67}$$

Le equazioni di Eulero–Lagrange, che in questo caso si chiamano equazioni di Klein–Gordon, sono

$$\sqrt{|g|} \left[ U'(\varphi) - g^{\alpha\beta} \nabla_\beta \nabla_\alpha \varphi \right] = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad g^{\alpha\beta} \nabla_\beta \nabla_\alpha \varphi = U'(\varphi) \tag{68}$$

Calcolando il tensore di stress di Hilbert dalla formula

$$\delta \mathbf{V}_{\text{KG}}(g_{\alpha\beta}, \varphi, \partial\varphi) = \tfrac{1}{2} \sqrt{|g|} \overset{h}{T}_{\beta\nu} \delta g^{\beta\nu} + \dots \tag{69}$$

quindi per la lagrangiana (61) si ottiene

$$\overset{h}{T}_{\beta\nu} = \varphi_\beta \varphi_\nu - \left( \tfrac{1}{2} g^{\alpha\rho} \varphi_\alpha \varphi_\rho + U(\varphi) \right) g_{\beta\nu} \tag{70}$$

Se consideriamo come varietà $M$ una varietà lorentziana quadridimensionale con una metrica di segnatura $(+, -, -, -)$, o $(-, -, -, +)$, la componente $\overset{h}{T}_{00}$ avrà la seguente espressione

$$\overset{h}{T}_{00} = \tfrac{1}{2} \left( (\varphi_0)^2 + (\varphi_1)^2 + (\varphi_2)^2 + (\varphi_3)^2 - U \right) \tag{71}$$

che se $U \leq 0$ è sempre non negativa[8] e rappresenta la densità di energia del campo $\varphi$.

Il ragionamento si può estendere, con le dovute cautele, anche al caso di campi scalari complessi.

[8] È stato scelto un sistema di coordinate $(x^\alpha)$ che, nel punto $p \in M$ in cui vogliamo calcolare $\overset{h}{T}_{00}$, la metrica coincida con la metrica di Minkowski in coordinate cartesiane ortonormali: $\|g_{\alpha\beta}\| = \text{diag}(+1, -1, -1, -1)$.

### 4.3 Lagrangiana materiale per il campo di Maxwell

Com'è ben noto la densità lagrangiana materiale per il campo di Maxwell è la seguente[9]

$$\mathbf{V}_{\text{Max}}(g_{\alpha\beta}, A_\mu, A_{\mu,\nu}) = -\tfrac{1}{4}\sqrt{|g|}g^{\alpha\beta}g^{\mu\nu}F_{\alpha\mu}F_{\beta\nu} \tag{72}$$

dove $A_\mu$ è il quadripotenziale del campo elettromagnetico, $A_{\mu,\nu} = d_\nu A_\mu$ ed $F_{\mu\nu}$ è il tensore di Faraday

$$F_{\mu\nu} = d_\mu A_\nu - d_\nu A_\mu = A_{\nu,\mu} - A_{\mu,\nu} \tag{73}$$

In dimensione 4, la lagrangiana (72) è conformemente invariante, cioè:

$$\mathbf{V}_{\text{Max}}(\Lambda\, g_{\alpha\beta}, A_\mu, A_{\mu,\nu}) = \mathbf{V}_{\text{Max}}(g_{\alpha\beta}, A_\mu, A_{\mu,\nu})\,.$$

Il coefficiente $\Lambda \neq 0$ può essere una funzione qualunque.

La variazione della densità lagrangiana (72) è

$$\begin{aligned}
\delta\mathbf{V}_{\text{Max}} &= -\tfrac{1}{2}\sqrt{|g|}g^{\alpha\beta}g^{\mu\nu}F_{\alpha\mu}\delta F_{\beta\nu} - \tfrac{1}{2}\sqrt{|g|}\delta g^{\alpha\beta}g^{\mu\nu}F_{\alpha\mu}F_{\beta\nu} && (74)\\
&\quad +\tfrac{1}{8}\sqrt{|g|}g^{\alpha\beta}g^{\mu\nu}F_{\alpha\mu}F_{\beta\nu}g_{\rho\sigma}\delta g^{\rho\sigma} && (75)\\
&= \sqrt{|g|}F^{\beta\nu}\delta A_{\beta,\nu} - \tfrac{1}{2}\sqrt{|g|}\left(g^{\mu\nu}F_{\rho\mu}F_{\sigma\nu} - \tfrac{1}{4}F^{\alpha\beta}F_{\alpha\beta}g_{\rho\sigma}\right)\delta g^{\rho\sigma} && (76)\\
&= d_\nu\left(\sqrt{|g|}F^{\beta\nu}\delta A_\beta\right) - \left[d_\nu\left(\sqrt{|g|}F^{\beta\nu}\right)\right]\delta A_\beta && (77)\\
&\quad -\tfrac{1}{2}\sqrt{|g|}\left(g^{\mu\nu}F_{\rho\mu}F_{\sigma\nu} - \tfrac{1}{4}F^{\alpha\beta}F_{\alpha\beta}g_{\rho\sigma}\right)\delta g^{\rho\sigma} && (78)
\end{aligned}$$

[9] A seconda delle unità di misura che scegliamo di usare per le quantità elettromagnetiche il fattore $-\frac{1}{4}$ può essere sostituito da $-\frac{1}{16\pi}$.

Le equazioni di Eulero–Lagrange sono

$$-d_\nu\left(\sqrt{|g|}F^{\beta\nu}\right)=0 \quad\Longleftrightarrow\quad -\sqrt{|g|}\nabla_\nu F^{\beta\nu}=0 \quad\Longleftrightarrow\quad \nabla_\nu F^{\beta\nu}=0 \tag{79}$$

Il tensore di stress di Hilbert è

$$\overset{h}{T}_{\rho\sigma}=-\left(g^{\mu\nu}F_{\rho\mu}F_{\sigma\nu}-\tfrac{1}{4}F^{\alpha\beta}F_{\alpha\beta}g_{\rho\sigma}\right) \tag{80}$$

e, sostituendo, si ha $\overset{h}{T}_{00}=\frac{1}{2}(\vec{E}\cdot\vec{E}+\vec{B}\cdot\vec{B})$.

### 4.4 Lagrangiana materiale per il campo di Proca–Yukawa

Un campo di Proca–Yukawa è un campo vettoriale $B^\mu$ che soddisfa a equazioni che assomigliano alle equazioni di Maxwell. Posto $A_\mu=g_{\mu\nu}B^\nu$, possiamo fare finta che $A_\mu$ sia il potenziale di un campo elettromagnetico, definire $F_{\mu\nu}=d_\mu A_\nu-d_\nu A_\mu$ e considerare una densità lagrangiama del tipo

$$\begin{aligned}\mathbf{V}_{\text{PY}}(g_{\alpha\beta},A_\mu,A_{\mu,\nu}) &= -\tfrac{1}{4}\sqrt{|g|}g^{\alpha\beta}g^{\mu\nu}F_{\alpha\mu}F_{\beta\nu}+\tfrac{1}{2}z\sqrt{|g|}g^{\mu\nu}A_\mu A_\nu && (81)\\ &= \mathbf{V}_{\text{Max}}(g_{\alpha\beta},A_\mu,A_{\mu,\nu})+\tfrac{1}{2}z\sqrt{|g|}g^{\mu\nu}A_\mu A_\nu && (82)\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\delta \mathbf{V}_{\text{PY}} &= \delta \mathbf{V}_{\text{Max}} + \delta\left(\tfrac{1}{2} z \sqrt{|g|} g^{\mu\nu} A_\mu A_\nu\right) && (83)\\
&= \delta \mathbf{V}_{\text{Max}} + z\sqrt{|g|} g^{\mu\nu} A_\mu \delta A_\nu + \tfrac{1}{2} z \left(\sqrt{|g|} A_\mu A_\nu \delta g^{\mu\nu} + g^{\mu\nu} A_\mu A_\nu \delta \sqrt{|g|}\right) && (84)\\
&= \delta \mathbf{V}_{\text{Max}} + z\sqrt{|g|} g^{\mu\beta} A_\mu \delta A_\beta + \tfrac{1}{2} z \sqrt{|g|}\left(A_\rho A_\sigma - \tfrac{1}{2} g^{\mu\nu} A_\mu A_\nu g_{\rho\sigma}\right)\delta g^{\rho\sigma} && (85)\\
&= d_\nu\left(\sqrt{|g|} F^{\beta\nu} \delta A_\beta\right) + \sqrt{|g|}\left(z A^\beta - \nabla_\nu F^{\beta\nu}\right)\delta A_\beta && (86)\\
&\quad -\tfrac{1}{2}\sqrt{|g|}\left[-z\left(A_\rho A_\sigma - \tfrac{1}{2} g^{\mu\nu} A_\mu A_\nu g_{\rho\sigma}\right) + g^{\mu\nu} F_{\rho\mu} F_{\sigma\nu} - \tfrac{1}{4} F^{\alpha\beta} F_{\alpha\beta} g_{\rho\sigma}\right]\delta g^{\rho\sigma} && (87)
\end{aligned}
$$

Le equazioni di Eulero–Lagrange sono

$$\sqrt{|g|}\left(z A^\beta - \nabla_\nu F^{\beta\nu} = 0\right) \qquad \Longleftrightarrow \qquad \nabla_\nu F^{\beta\nu} = z A^\beta$$

che hanno come conseguenza l'equazione

$$\nabla_\beta A^\beta = 0\,.$$

Nel caso delle equazioni di Maxwell questa equazione corrisponde al *gauge di Lorentz* che deve, invece, essere imposto.

Per il tensore di stress di Hilbert si ha

$$\overset{h}{T}_{\rho\sigma}(\mathbf{V}_{\text{PY}}) = \overset{h}{T}_{\rho\sigma}(\mathbf{V}_{\text{Max}}) + z\left(A_\rho A_\sigma - \tfrac{1}{2} g^{\mu\nu} A_\mu A_\nu g_{\rho\sigma}\right)$$

e, quindi,

$$\overset{h}{T}_{00}(\mathbf{V}_{\text{PY}}) = \overset{h}{T}_{00}(\mathbf{V}_{\text{Max}}) + \tfrac{1}{2} z\left((A_0)^2 + (A_1)^2 + (A_2)^2 + (A_3)^3\right)$$

Se consideriamo $z > 0$ si ha certamente $\overset{h}{T}_{00}(\mathbf{V}_{\text{PY}}) \geq 0$. La scelta tipica per la costante $z$ è

$$z = \left(\frac{m\,c}{\hbar}\right)^2 = \frac{1}{\lambda^2}$$

dove $m$ è la massa del campo e $\lambda$ è la corrispondente lunghezza d'onda.

### 4.5 Lagrangiana materiale per elettromagnetismo e campi scalari carichi

Per studiare l'interazione fra il campo elettromagnetico ed i campi scalari carichi, su uno spazio-tempo fissato, si considera una lagrangiana materiale che è la somma della lagrangiana $\mathbf{V}_{\text{Max}}(g_{\alpha\beta}, A_\mu, A_{\mu,\nu})$ e di una lagrangiana materiale che generalizza la lagrangiana materiale $\mathbf{V}_{\text{KG}}(g_{\alpha\beta}, \varphi, \partial\varphi)$. Per convenzione, un campo scalare carico è un campo scalare complesso $\varphi : M \longrightarrow \mathbb{C}$ o, equivalentemente, una sezione del fibrato vettoriale $M \times \mathbb{C} \longrightarrow M$.

La derivata "gauge covariante" di un campo scalare $\varphi : M \longrightarrow \mathbb{C}$ di carica $q$ è definita da

$$D_\mu\varphi = d_\mu\varphi - i\tfrac{q}{\hbar c}A_\mu\varphi = \nabla_\mu\varphi - i\tfrac{q}{\hbar c}A_\mu\varphi$$

Per definire la derivata "gauge covariante" del campo $\varphi^* : M \longrightarrow \mathbb{C}$, che ha carica $-q$, è definita da

$$D_\mu(\varphi^*) = (D_\mu\varphi)^* = d_\mu\varphi^* + i\tfrac{q}{\hbar c}A_\mu\varphi^* = \nabla_\mu\varphi^* + i\tfrac{q}{\hbar c}A_\mu\varphi^*$$

Le trasformazione di gauge sono trasformazioni del tipo

$$(A_\mu, \varphi) \longmapsto (A'_\mu, \varphi') = (A_\mu + d_\mu\Lambda, \varphi \cdot e^{i\frac{q}{\hbar c}\Lambda})$$

dove $\Lambda$ è una funzione qualunque e si ha:

$$\begin{aligned}
D'_\mu\varphi' &= d_\mu\varphi' - i\tfrac{q}{\hbar c}A'_\mu\varphi' && (88)\\
&= (d_\mu\varphi)e^{i\frac{q}{\hbar c}\Lambda} + \varphi e^{i\frac{q}{\hbar c}\Lambda} i\tfrac{q}{\hbar c}d_\mu\Lambda - i\tfrac{q}{\hbar c}(A_\mu + d_\mu\Lambda)\varphi e^{i\frac{q}{\hbar c}\Lambda} && (89)\\
&= e^{i\frac{q}{\hbar c}\Lambda}\left(d_\mu\varphi + i\tfrac{q}{\hbar c}\varphi d_\mu\Lambda - i\tfrac{q}{\hbar c}(A_\mu + d_\mu\Lambda)\varphi\right) && (90)\\
&= e^{i\frac{q}{\hbar c}\Lambda}D_\mu\varphi && (91)
\end{aligned}$$

Invece di considerare come componenti del campo complesso $\varphi$ la sua parte reale $\Re(\varphi)$ e la sua parte immaginaria $\Im(\varphi)$, possiamo lavorare direttamente col campo complesso $\varphi$ e col suo complesso coniugato $\varphi^*$ pensandoli come se fossero indipendenti. La densità lagrangiana per il campo scalare complesso $\varphi$ sarà la funzione a valori reali

$$\mathbf{V}_{\text{cKG}}(g_{\alpha\beta}, A_\mu, \varphi, \partial\varphi, \varphi^*, \partial\varphi^*) = \left[\tfrac{1}{2}g^{\alpha\beta}D_\alpha\varphi D_\beta\varphi^* - \tfrac{1}{2}V(\varphi\,\varphi^*)\right]\sqrt{|g|} \tag{92}$$

che è invariante per trasformazioni di gauge.

Tenendo conto che le variazioni di $D_\alpha\varphi$ sono

$$\delta(D_\mu\varphi) = d_\mu\delta\varphi - i\tfrac{q}{\hbar c}A_\mu\delta\varphi - i\tfrac{q}{\hbar c}\varphi\,\delta A_\mu = D_\mu\delta\varphi - i\tfrac{q}{\hbar c}\varphi\,\delta A_\mu$$

si ha

$$\begin{aligned}
\delta \mathbf{V}_{\mathrm{cKG}} &= \Big[\tfrac{1}{2} g^{\alpha\beta}(D_\beta\varphi)^* \delta(D_\alpha\varphi) + \tfrac{1}{2} g^{\alpha\beta}(D_\alpha\varphi)\delta(D_\beta\varphi)^* \\
&\quad + \tfrac{1}{2} D_\alpha\varphi D_\beta\varphi^* \delta g^{\alpha\beta} - \tfrac{1}{2} V'(\varphi\,\varphi^*)\delta(\varphi\,\varphi^*)\Big]\sqrt{|g|} \\
&\quad - \tfrac{1}{2}\Big[\tfrac{1}{2} g^{\alpha\beta} D_\alpha\varphi D_\beta\varphi^* + U(\varphi\,\varphi^*)\Big]\sqrt{|g|} g_{\rho\sigma}\delta g^{\rho\sigma} \qquad (93)\\
&= \Big\{\tfrac{1}{2}\left[D^\mu\varphi^* D_\mu\delta\varphi + D^\mu\varphi D_\mu\delta\varphi^* - i\tfrac{q}{\hbar c}(\varphi D^\mu\varphi^* - \varphi^* D^\mu\varphi)\delta A_\mu\right] \\
&\quad - \tfrac{1}{2} V'(\varphi\,\varphi^*)\varphi\delta\varphi^* - \tfrac{1}{2} V'(\varphi\,\varphi^*)\varphi^*\delta\varphi\Big\}\sqrt{|g|} \\
&\quad + \tfrac{1}{2}\Big[\tfrac{1}{2}\big(D_\rho\varphi D_\sigma\varphi^* + D_\sigma\varphi D_\rho\varphi^*\big) - \big(\tfrac{1}{2} g^{\alpha\beta} D_\alpha\varphi D_\beta\varphi^* - \tfrac{1}{2} V(\varphi\,\varphi^*)\big) g_{\rho\sigma}\Big]\sqrt{|g|}\delta g^{\rho\sigma} \qquad (94)\\
&= -\tfrac{1}{2}\sqrt{|g|}\left[D_\mu\left(D^\mu\varphi\right) + V'(\varphi\,\varphi^*)\varphi\right]\delta\varphi^* - \tfrac{1}{2}\sqrt{|g|}\left[D_\mu\left(D^\mu\varphi^*\right) + V'(\varphi\,\varphi^*)\varphi^*\right]\delta\varphi \\
&\quad - \tfrac{1}{2} i\tfrac{q}{\hbar c}(\varphi D^\mu\varphi^* - \varphi^* D^\mu\varphi)\sqrt{|g|}\delta A_\mu \\
&\quad + \tfrac{1}{4}\Big[D_\rho\varphi D_\sigma\varphi^* + D_\sigma\varphi D_\rho\varphi^* - \big(g^{\alpha\beta} D_\alpha\varphi D_\beta\varphi^* - V(\varphi\,\varphi^*)\big) g_{\rho\sigma}\Big]\sqrt{|g|}\delta g^{\rho\sigma} \qquad (95)
\end{aligned}$$

Le equazioni di Eulero–Lagrange sono

$$-\frac{2}{\sqrt{|g|}}\frac{\delta \mathbf{V}_{\mathrm{cKG}}}{\delta\varphi} = D_\mu\left(D^\mu\varphi^*\right) + V'(\varphi\,\varphi^*)\varphi^* = 0 \qquad (96)$$

oppure, equivalentemente,

$$-\frac{2}{\sqrt{|g|}}\frac{\delta \mathbf{V}_{\mathrm{cKG}}}{\delta\varphi^*} = D_\mu\left(D^\mu\varphi\right) + V'(\varphi\,\varphi^*)\varphi = 0 \qquad (97)$$

Per il tensore di stress di Hilbert si ha

$$\overset{h}{T}_{\rho\sigma}(\mathbf{V}_{\mathrm{cKG}}) = \tfrac{1}{2}\Big[D_\rho\varphi D_\sigma\varphi^* + D_\sigma\varphi D_\rho\varphi^* - \big(g^{\alpha\beta} D_\alpha\varphi D_\beta\varphi^* - V(\varphi\,\varphi^*)\big) g_{\rho\sigma}\Big]$$

e, quindi,

$$\begin{aligned}\overset{h}{T}_{00}(\mathbf{V}_{\text{cKG}}) &= \tfrac{1}{2}\Big[2\,D_0\varphi D_0\varphi^* - \big(D_0\varphi D_0\varphi^* - D_1\varphi D_1\varphi^* - D_2\varphi D_2\varphi^* - D_3\varphi D_3\varphi^* - V(\varphi\,\varphi^*)\big)\Big] \\ &= \tfrac{1}{2}\Big[D_0\varphi D_0\varphi^* + D_1\varphi D_1\varphi^* + D_2\varphi D_2\varphi^* + D_3\varphi D_3\varphi^* + V(\varphi\,\varphi^*)\Big]\end{aligned}$$

che se $V\geq 0$ è sempre non negativa e rappresenta la densità di energia del campo $\varphi$.

Per tenere conto anche del termine

$$-\tfrac{1}{2}i\tfrac{q}{\hbar c}(\varphi D^\mu\varphi^* - \varphi^* D^\mu\varphi)\sqrt{|g|}\delta A_\mu$$

bisogna considerare una lagrangiana materiale che sia la somma

$$\mathbf{V} = \mathbf{V}_{\text{cKG}}(g_{\alpha\beta}, A_\mu, \varphi, \partial\varphi, \varphi^*, \partial\varphi^*) + \mathbf{V}_{\text{Max}}(g_{\alpha\beta}, A_\mu, A_{\mu,\nu})$$

Le equazioni di Maxwell (79) vengono rimpiazzate dalle seguenti equazioni

$$-d_\nu\left(\sqrt{|g|}F^{\mu\nu}\right) - \tfrac{1}{2}i\tfrac{q}{\hbar c}(\varphi D^\mu\varphi^* - \varphi^* D^\mu\varphi)\sqrt{|g|} = 0$$

che equivalgono alle equazioni

$$\nabla_\nu F^{\mu\nu} = \tfrac{1}{2}i\tfrac{q}{\hbar c}(\varphi^* D^\mu\varphi - \varphi D^\mu\varphi^*) \tag{98}$$

Il campo di vettori *densità di corrente*

$$J^\mu = \tfrac{1}{2}i\tfrac{q}{\hbar c}(\varphi^* D^\mu\varphi - \varphi D^\mu\varphi^*)$$

ha divergenza

$$\nabla_\mu J^\mu = \frac{i\,q}{\hbar\,c\,\sqrt{|g|}} \left( \varphi\,\frac{\delta \mathbf{V}_{\mathrm{cKG}}}{\delta\varphi} - \varphi^*\,\frac{\delta \mathbf{V}_{\mathrm{cKG}}}{\delta\varphi^*} \right)$$

e, quindi, la densità di corrente è conservata sulle soluzioni delle equazioni di campo (96) e (97) (e delle equazioni di Maxwell (98)).

**FINE LEZIONE 23 MMdFC (2023-05-23 ore 11:00 – 13:00)**

## 5 Equivalenza delle teorie puramente metriche, metrico affini e puramente affini.

Lagrangiana puramente metrica del second'ordine (Hilbert):

$$
\begin{aligned}
\mathbf{L}(j^2 g, j^1\varphi) &= -\tfrac{1}{2\kappa}\mathfrak{g}^{\beta\nu} r_{\beta\nu}(j^2 g) + \mathbf{V}(j^1 g, j^1\varphi)\\
&= -\tfrac{1}{2\kappa}\mathfrak{g}^{\beta\nu} d_\alpha \left[u^\alpha_{\beta\nu}(j^1 g)\right] - \tfrac{1}{2\kappa}\mathfrak{g}^{\beta\nu}\left[\gamma^\alpha_{\sigma\alpha}(j^1 g)\gamma^\sigma_{\beta\nu}(j^1 g) - \gamma^\alpha_{\sigma\nu}(j^1 g)\gamma^\sigma_{\beta\alpha}(j^1 g)\right] + \mathbf{V}(j^1 g, j^1\varphi)\\
&= -\tfrac{1}{2\kappa} d_\alpha \left[\mathfrak{g}^{\beta\nu} u^\alpha_{\beta\nu}(j^1 g)\right] + \tfrac{1}{2\kappa}\mathfrak{g}^{\beta\nu}\left[\gamma^\alpha_{\sigma\alpha}(j^1 g)\gamma^\sigma_{\beta\nu}(j^1 g) - \gamma^\alpha_{\sigma\nu}(j^1 g)\gamma^\sigma_{\beta\alpha}(j^1 g)\right] + \mathbf{V}(j^1 g, j^1\varphi)
\end{aligned}
$$

Variazione (Palatini)

$$
\begin{aligned}
\delta\mathbf{L} &= -\tfrac{1}{2\kappa}\mathfrak{g}^{\beta\nu}\delta r_{\beta\nu} - \tfrac{1}{2\kappa} r_{\beta\nu}\delta\mathfrak{g}^{\beta\nu} + \delta\mathbf{V}\\
&= -\tfrac{1}{2\kappa}\mathfrak{g}^{\beta\nu}\nabla_\alpha \delta u^\alpha_{\beta\nu} - \tfrac{1}{2\kappa} r_{\beta\nu}\delta\mathfrak{g}^{\beta\nu} + \frac{1}{2}\left(t_{\beta\nu}\delta\mathfrak{g}^{\beta\nu} + t^\alpha_{\beta\nu}\delta\mathfrak{g}^{\beta\nu}_\alpha\right) + \mathbf{f}_a\delta\varphi^a + \mathbf{p}^\mu_a\delta\varphi^a_\mu\\
&= -\tfrac{1}{2\kappa} d_\alpha\left(\mathfrak{g}^{\beta\nu}\delta u^\alpha_{\beta\nu}\right) - \tfrac{1}{2\kappa} r_{\beta\nu}\delta\mathfrak{g}^{\beta\nu} + \frac{1}{2}\left(t_{\beta\nu}\delta\mathfrak{g}^{\beta\nu} + t^\alpha_{\beta\nu}\delta\mathfrak{g}^{\beta\nu}_\alpha\right) + \mathbf{f}_a\delta\varphi^a + \mathbf{p}^\mu_a\delta\varphi^a_\mu\\
&= \left[-\tfrac{1}{2\kappa} r_{\beta\nu} + \frac{1}{2}\left(t_{\beta\nu} - d_\alpha t^\alpha_{\beta\nu}\right)\right]\delta\mathfrak{g}^{\beta\nu} + \left(\mathbf{f}_a - d_\alpha\mathbf{p}^\alpha_a\right)\delta\varphi^a\\
&\quad + d_\alpha\left(-\tfrac{1}{2\kappa}\mathfrak{g}^{\beta\nu}\delta u^\alpha_{\beta\nu} + \frac{1}{2} t^\alpha_{\beta\nu}\delta\mathfrak{g}^{\beta\nu} + \mathbf{p}^\alpha_a\delta\varphi^a\right)
\end{aligned}
$$

Lagrangiana puramente metrica del prim'ordine (Einstein):

$$
\begin{aligned}
\mathbf{U}(j^1 g, j^1\varphi) &= \mathbf{L}(j^2 g, j^1\varphi) + \tfrac{1}{2\kappa} d_\alpha\left[\mathfrak{g}^{\beta\nu} u^\alpha_{\beta\nu}(j^1 g)\right]\\
&= \tfrac{1}{2\kappa}\mathfrak{g}^{\beta\nu}\left[\gamma^\alpha_{\sigma\alpha}(j^1 g)\gamma^\sigma_{\beta\nu}(j^1 g) - \gamma^\alpha_{\sigma\nu}(j^1 g)\gamma^\sigma_{\beta\alpha}(j^1 g)\right] + \mathbf{V}(j^1 g, j^1\varphi)
\end{aligned}
$$

Variazione:

$$\begin{aligned}
\delta\mathbf{U}(j^1 g, j^1\varphi) &= \delta\mathbf{L}(j^2 g, j^1\varphi) + \tfrac{1}{2\kappa} d_\alpha\left[\mathfrak{g}^{\beta\nu}\delta u^\alpha_{\beta\nu} + u^\alpha_{\beta\nu}\delta\mathfrak{g}^{\beta\nu}\right] \\
&= \tfrac{1}{2\kappa} d_\alpha\left(u^\alpha_{\beta\nu}\delta\mathfrak{g}^{\beta\nu}\right) - \tfrac{1}{2\kappa} r_{\beta\nu}\delta\mathfrak{g}^{\beta\nu} + \tfrac{1}{2\kappa}\left(V_{\beta\nu}\delta\mathfrak{g}^{\beta\nu} + V^\alpha_{\beta\nu}\delta\mathfrak{g}^{\beta\nu}_\alpha\right) + \mathbf{f}_a\delta\varphi^a + \mathbf{p}^\mu_a\delta\varphi^a_\mu \\
&= \tfrac{1}{2\kappa}\left(d_\alpha u^\alpha_{\beta\nu} - r_{\beta\nu}\right)\delta\mathfrak{g}^{\beta\nu} + \tfrac{1}{2\kappa} u^\alpha_{\beta\nu}\delta\mathfrak{g}^{\beta\nu}_\alpha + \tfrac{1}{2\kappa}\left(V_{\beta\nu}\delta\mathfrak{g}^{\beta\nu} + V^\alpha_{\beta\nu}\delta\mathfrak{g}^{\beta\nu}_\alpha\right) + \mathbf{f}_a\delta\varphi^a + \mathbf{p}^\mu_a\delta\varphi^a_\mu \\
&= \tfrac{1}{2\kappa}\left(d_\alpha u^\alpha_{\beta\nu} - r_{\beta\nu} + V_{\beta\nu}\right)\delta\mathfrak{g}^{\beta\nu} + \frac{1}{2\kappa}\left(u^\alpha_{\beta\nu} + V^\alpha_{\beta\nu}\right)\delta\mathfrak{g}^{\beta\nu}_\alpha + \mathbf{f}_a\delta\varphi^a + \mathbf{p}^\mu_a\delta\varphi^a_\mu
\end{aligned}$$

Definizione momenti coniugati:

$$\begin{aligned}
U^\alpha_{\beta\nu} &= u^\alpha_{\beta\nu} + V^\alpha_{\beta\nu} \\
U_{\beta\nu} &= d_\alpha u^\alpha_{\beta\nu} - r_{\beta\nu} + V_{\beta\nu} \\
&= -\left(\gamma^\alpha_{\sigma\alpha}\gamma^\sigma_{\beta\nu} - \gamma^\sigma_{\alpha\beta}\gamma^\alpha_{\sigma\nu}\right) + V_{\beta\nu}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Gamma^\alpha_{\beta\mu} &= U^\alpha_{\beta\nu} - \frac{1}{n-1}\left(\delta^\alpha_\beta U_\mu + \delta^\alpha_\mu U_\beta\right) \\
&= \gamma^\alpha_{\beta\nu} + V^\alpha_{\beta\nu} - \frac{1}{n-1}\left(\delta^\alpha_\beta V_\mu + \delta^\alpha_\mu V_\beta\right)
\end{aligned}$$

Trasformata di Legendre completa:

$$
\begin{aligned}
\mathbf{U}^*(j^1g, j^1\varphi) &= \mathbf{U}(j^1g, j^1\varphi) - \tfrac{1}{2\kappa}\left(U_{\beta\nu}\mathfrak{g}^{\beta\nu} + U^\alpha_{\beta\nu}\mathfrak{g}^{\beta\nu}_\alpha\right) \\
&= \mathbf{U}(j^1g, j^1\varphi) - \tfrac{1}{2\kappa}\left[\left(d_\alpha u^\alpha_{\beta\nu} - r_{\beta\nu} + V_{\beta\nu}\right)\mathfrak{g}^{\beta\nu} + \left(u^\alpha_{\beta\nu} + V^\alpha_{\beta\nu}\right)\mathfrak{g}^{\beta\nu}_\alpha\right] \\
&= \mathbf{L}(j^2g, j^1\varphi) - \tfrac{1}{2\kappa}\left[\left(-r_{\beta\nu} + V_{\beta\nu}\right)\mathfrak{g}^{\beta\nu} + \left(V^\alpha_{\beta\nu}\right)\mathfrak{g}^{\beta\nu}_\alpha\right] \\
&= \mathbf{V}(j^1g, j^1\varphi) - \tfrac{1}{2\kappa}\left(V_{\beta\nu}\mathfrak{g}^{\beta\nu} + V^\alpha_{\beta\nu}\mathfrak{g}^{\beta\nu}_\alpha\right) \\
&= \mathbf{V}(j^1g, j^1\varphi) - \tfrac{1}{2\kappa}\left[\left(V_{\beta\nu} - d_\alpha V^\alpha_{\beta\nu}\right)\mathfrak{g}^{\beta\nu} + d_\alpha\left(V^\alpha_{\beta\nu}\mathfrak{g}^{\beta\nu}\right)\right] \\
&= \mathbf{V}(j^1g, j^1\varphi) - \tfrac{1}{2\kappa}\left(V_{\beta\nu} - d_\alpha V^\alpha_{\beta\nu} + \nabla_\alpha V^\alpha_{\beta\nu}\right)\mathfrak{g}^{\beta\nu} \\
&\simeq \mathbf{L}(j^1\Gamma, j^1\varphi)
\end{aligned}
$$

Tensore di Ricci simmetrizzato per la nuova connessione

$$
\begin{aligned}
G_{\beta\nu} &= d_\alpha U^\alpha_{\beta\nu} + \Gamma^\alpha_{\sigma\alpha}\Gamma^\sigma_{\beta\nu} - \Gamma^\alpha_{\sigma\nu}\Gamma^\sigma_{\beta\alpha} \\
&= \left(d_\alpha U^\alpha_{\beta\nu} - U_{\beta\nu}\right) + U_{\beta\nu} + \Gamma^\alpha_{\sigma\alpha}\Gamma^\sigma_{\beta\nu} - \Gamma^\alpha_{\sigma\nu}\Gamma^\sigma_{\beta\alpha} \\
&\simeq U_{\beta\nu} + \Gamma^\alpha_{\sigma\alpha}\Gamma^\sigma_{\beta\nu} - \Gamma^\alpha_{\sigma\nu}\Gamma^\sigma_{\beta\alpha} \\
&= \left(d_\alpha u^\alpha_{\beta\nu} - r_{\beta\nu} + V_{\beta\nu}\right) + \left(r_{\beta\nu} - d_\alpha u^\alpha_{\beta\nu} + \nabla_\alpha V^\alpha_{\beta\nu} - d_\alpha V^\alpha_{\beta\nu}\right) + \left(N_\sigma N^\sigma_{\beta\nu} - N^\alpha_{\sigma\nu}N^\sigma_{\alpha\beta}\right) \\
&= \left(V_{\beta\nu} + \nabla_\alpha V^\alpha_{\beta\nu} - d_\alpha V^\alpha_{\beta\nu}\right) + \left(\frac{1}{n-1}V_\beta V_\nu - V^\alpha_{\sigma\nu}V^\sigma_{\alpha\beta}\right)
\end{aligned}
$$

Lagrangiana materiale metrico–affine:

$$
\begin{aligned}
\mathbf{W}(g,\Gamma,j^1\varphi) &= \mathbf{L}(j^1\Gamma,j^1\varphi)+\tfrac{1}{2\kappa}\mathfrak{g}^{\beta\nu}G_{\beta\nu}\\
&= \mathbf{V}(j^1 g,j^1\varphi)-\tfrac{1}{2\kappa}\left(V_{\beta\nu}-d_\alpha V^\alpha_{\beta\nu}+\nabla_\alpha V^\alpha_{\beta\nu}\right)\mathfrak{g}^{\beta\nu}+\tfrac{1}{2\kappa}\mathfrak{g}^{\beta\nu}G_{\beta\nu}\\
&= \mathbf{V}(j^1 g,j^1\varphi)+\tfrac{1}{2\kappa}\mathfrak{g}^{\beta\nu}\left(\frac{1}{n-1}V_\beta V_\nu-V^\alpha_{\sigma\nu}V^\sigma_{\alpha\beta}\right)
\end{aligned}
$$

Variazione della lagrangiana materiale puramente–metrica covariante

$$
\begin{aligned}
\delta\mathbf{V}(g^{\mu\nu},\varphi^a,\nabla_\lambda\varphi^b) &= \frac{1}{2}\mathfrak{t}_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu}+\mathfrak{f}_a\delta\varphi^a+\mathfrak{p}^\lambda_a\delta\nabla_\lambda\varphi^a\\
&= \tfrac{1}{2\kappa}\tilde{V}_{\mu\nu}\delta\mathfrak{g}^{\mu\nu}+\mathfrak{f}_a\delta\varphi^a+\mathfrak{p}^\lambda_a\left(\nabla_\lambda\delta\varphi^a+Z^{a\beta}{}_\alpha\delta\gamma^\alpha_{\beta\lambda}\right)\\
&= \tfrac{1}{2\kappa}\tilde{V}_{\mu\nu}\delta\mathfrak{g}^{\mu\nu}+\frac{1}{2}\left(Z^{a\beta}{}_\alpha\mathfrak{p}_a{}^\mu+Z^{a\mu}{}_\alpha\mathfrak{p}_a{}^\beta\right)\delta\gamma^\alpha_{\beta\mu}+\mathfrak{f}_a\delta\varphi^a+\mathfrak{p}^\lambda_a\nabla_\lambda\delta\varphi^a\\
&= \tfrac{1}{2\kappa}\tilde{V}_{\mu\nu}\delta\mathfrak{g}^{\mu\nu}-\mathfrak{a}^{\beta\mu}{}_\alpha\delta\gamma^\alpha_{\beta\mu}+\mathfrak{f}_a\delta\varphi^a+\mathfrak{p}^\lambda_a\nabla_\lambda\delta\varphi^a\\
&= \tfrac{1}{2\kappa}\tilde{V}_{\mu\nu}\delta\mathfrak{g}^{\mu\nu}+\frac{1}{2}\mathfrak{t}^\sigma{}_{\mu\nu}\nabla_\sigma\delta g^{\mu\nu}+\mathfrak{f}_a\delta\varphi^a+\mathfrak{p}^\lambda_a\nabla_\lambda\delta\varphi^a\\
&= \tfrac{1}{2\kappa}\left(\tilde{V}_{\mu\nu}\delta\mathfrak{g}^{\mu\nu}+V^\sigma{}_{\mu\nu}\nabla_\sigma\delta\mathfrak{g}^{\mu\nu}\right)+\mathfrak{f}_a\delta\varphi^a+\mathfrak{p}^\lambda_a\nabla_\lambda\delta\varphi^a\\
&= \tfrac{1}{2\kappa}\left[\left(\tilde{V}_{\mu\nu}-\nabla_\sigma V^\sigma{}_{\mu\nu}+d_\sigma V^\sigma{}_{\mu\nu}\right)\delta\mathfrak{g}^{\mu\nu}+V^\sigma{}_{\mu\nu}\delta\mathfrak{g}^{\mu\nu}{}_\sigma\right]+\mathfrak{f}_a\delta\varphi^a+\mathfrak{p}^\lambda_a\nabla_\lambda\delta\varphi^a
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\kappa\mathfrak{t}_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu} &= \tilde{V}_{\mu\nu}\delta\mathfrak{g}^{\mu\nu} \\
&= \tilde{V}_{\mu\nu}\left(\sqrt{|g|}\delta g^{\mu\nu} + g^{\mu\nu}\delta\sqrt{|g|}\right) \\
&= \sqrt{|g|}\tilde{V}_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu} + \tilde{V}_{\mu\nu}g^{\mu\nu}\delta\sqrt{|g|} \\
&= \left(\tilde{V}_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\tilde{V}g_{\mu\nu}\right)\sqrt{|g|}\delta g^{\mu\nu} \\
\kappa\mathfrak{t}^{\sigma}{}_{\mu\nu}\nabla_{\sigma}\delta g^{\mu\nu} &= V^{\sigma}{}_{\mu\nu}\nabla_{\sigma}\delta\mathfrak{g}^{\mu\nu} \\
&= \left(V^{\sigma}{}_{\mu\nu} - \frac{1}{2}V^{\sigma}g_{\mu\nu}\right)\sqrt{|g|}\nabla_{\sigma}\delta g^{\mu\nu} \\
\mathbf{L}(j^1\Gamma, j^1\varphi) &\simeq \mathbf{V}(\mathfrak{g}^{\mu\nu}, \varphi^a, \nabla_\lambda\varphi^b) - \tfrac{1}{2\kappa}\tilde{V}_{\beta\nu}\mathfrak{g}^{\beta\nu}
\end{aligned}
$$

## Riferimenti bibliografici


[1] D. Hilbert: *Die Grundlagen der Physik*; Nachr. Ges. Wiss. Göttingen, Math. Phys. Kl. 395-40 (1915)

[2] A. Einstein: *Zur allgemeinen Relativitätstheorie*; Sitz. Ber. Preuss. Akad. Wiss. **2**, 778 (1915).

[3] A. Einstein: *HAMILTONsches Prinzip und allgemeine Relativitätstheorie*; Sitz. Ber. Preuss. Akad. Wiss. **2**, 1111 (1916).

[4] A. Palatini: *Deduzione invariantiva delle equazioni gravitazionali dal principio di Hamilton*; Rend. Circ. Mat. Palerno **43**, 203 (1919).

[5] W. Pauli: *Pauli Lectures on Physics Volume I: Electrodynamics*; Dover Publications, Inc. (1973).

[6] J. L. Anderson: *Principles of Relativity Pysics*; Academic Press (1967).

[7] L. Landau, E. Lifchitz: *Physique Théorique, Tome II: Théorie des champs*; Éditions MIR (1970).

[8] W. Szczyrba: *A Symplectic Structure on the Set of Einstein Metrics (A Canonical Formalism for General Relativity)*; Commun. Math. Phys. 51, 163–182 (1976).