Appunti di Meccanica Lagrangiana

Marco Ferraris

maggio 2023

1 Sistemi lagrangiani

Nel caso di sistemi dinamici sottoposti a vincoli olonomi che non dipendono dal tempo esiste uno *spazio delle configurazioni* Q che è una varietà differenziabile di dimensione finita n. Il *fibrato delle configurazioni*, detto anche *spazio–tempo degli eventi*, è definito come il prodotto cartesiano $\boldsymbol{Q} = \mathbb{R} \times Q$. Nel caso di vincoli olonomi dipendenti dal tempo, ad ogni istante t si ha uno spazio delle configurazioni istantaneo Q_t, che è una varietà differenziabile di dimensione n, ed il fibrato delle configurazioni è definito come l'unione disgiunta $\boldsymbol{Q} = \cup_{t\in\mathbb{R}}\{t\} \times Q_t$ di tutti gli spazi delle configurazioni istantanei. Se tutti gli spazi delle configurazioni istantanei sono diffeomorfi fra di loro può aver senso parlare di spazio delle configurazioni, ma in generale non è detto ciò che succeda.

In entrambi i casi, il fibrato delle configurazioni è una varietà differenziabile di dimensione $n+1$ su cui è definita una proiezione $\boldsymbol{\pi} : \boldsymbol{Q} \longrightarrow \mathbb{R}$, che è una funzione suriettiva di classe C^∞ con mappa tangente suriettiva. Si ha quindi una struttura di *varietà fibrata* su $\mathbb{R}$. Le *sezioni* del fibrato delle configurazioni $\boldsymbol{\pi} : \boldsymbol{Q} \longrightarrow \mathbb{R}$, o *leggi orarie* del moto, sono le funzioni $\boldsymbol{\gamma} : \mathbb{R} \longrightarrow \boldsymbol{Q}$ tali che $\boldsymbol{\pi} \circ \boldsymbol{\gamma} = \mathrm{id}_{\mathbb{R}}$. Nel caso in cui sia possibile definire uno spazio delle configurazioni Q, le sezioni sono in corrispondenza biunivoca (per i vincoli indipendenti dal tempo, attraverso la seconda proiezione del prodotto cartesiano) con le curve nello spazio delle configurazioni Q.

Sui fibrati delle configurazioni utilizzeremo sempre solo *coordinate fibrate* (t, q^α) e le trasformazioni di coordinate ammesse sono solo le trasformazioni di coordinate fibrate, cioè quelle del tipo

$$(t, q^\alpha) \longmapsto (t'(t), q'^{\beta'}(t, q^\alpha))$$

con

$$\frac{dt'}{dt}(t) \neq 0 \qquad \text{e} \qquad \det\left(\frac{\partial q'^{\beta'}}{\partial q^\alpha}(t, q)\right) \neq 0$$

In coordinate fibrate, le sezioni del fibrato delle configurazioni sono funzioni del tipo

$$\boldsymbol{\gamma} : t \longmapsto (t, \gamma^\alpha(t)).$$

Il *fibrato delle velocità* è la sottovarietà[1] $J^1\boldsymbol{Q}$ del fibrato $T\boldsymbol{Q} \otimes T^*\mathbb{R}$ costituita dalle mappe tangenti alle sezioni di $\boldsymbol{Q}$. In coordinate fibrate sono i tensori del tipo

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \dot{q}^\alpha \frac{\partial}{\partial q^\alpha}\right) \otimes d\,t$$

[1] Sottofibrato affine.

e le *coordinate fibrate naturali* su $J^1\boldsymbol{Q}$ sono $(t, q^\alpha, \dot{q}^\beta)$. La proiezione $\tau_{\boldsymbol{Q}} : T\boldsymbol{Q} \longrightarrow \boldsymbol{Q}$ induce una proiezione $\boldsymbol{\pi}^1_0 : J^1\boldsymbol{Q} \longrightarrow \boldsymbol{Q}$ che, composta con la proiezione $\boldsymbol{\pi} : \boldsymbol{Q} \longrightarrow \mathbb{R}$, fornisce una proiezione $\boldsymbol{\pi}^1 : J^1\boldsymbol{Q} \longrightarrow \mathbb{R}$. [2]

Ogni sezione $\boldsymbol{\gamma}$, di classe C^k, del fibrato $\boldsymbol{\pi} : \boldsymbol{Q} \longrightarrow \mathbb{R}$ si può prolungare, attraverso la sua mappa tangente, ad una sezione $j^1\boldsymbol{\gamma}$, di classe C^{k-1}, del fibrato $\boldsymbol{\pi}^1 : J^1\boldsymbol{Q} \longrightarrow \mathbb{R}$. In coordinate fibrate naturali si ha:

$$j^1\boldsymbol{\gamma} : t \longmapsto \left(t, \gamma^\alpha(t), \frac{d\gamma^\alpha(t)}{dt} \right)$$

Analogamente a quanto fatto per definire il fibrato delle velocità $J^1\boldsymbol{Q}$, possiamo definire il *fibrato delle accelerazioni* $J^2\boldsymbol{Q}$ come la sottovarietà di $T(J^1\boldsymbol{Q}) \otimes T^*\mathbb{R}$ costituita dai vettori tangenti ai prolungamenti $j^1\boldsymbol{\gamma}$ delle sezioni $\boldsymbol{\gamma}$ del fibrato $\boldsymbol{Q}$. In coordinate fibrate sono i tensori del tipo

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \dot{q}^\alpha \frac{\partial}{\partial q^\alpha} + \ddot{q}^\alpha \frac{\partial}{\partial \dot{q}^\alpha} \right) \otimes d\,t$$

e le *coordinate fibrate naturali* su $J^2\boldsymbol{Q}$ sono $(t, q^\alpha, \dot{q}^\alpha, \ddot{q}^\alpha)$. Le mappe tangenti ai prolungamenti $j^1\boldsymbol{\gamma}$ definiscono i prolungamenti del second'ordine $j^2\boldsymbol{\gamma}$ delle sezioni $\boldsymbol{\gamma}$:

$$j^2\boldsymbol{\gamma} : t \longmapsto \left(t, \gamma^\alpha(t), \frac{d\gamma^\alpha(t)}{dt}, \frac{d^2\gamma^\alpha(t)}{dt^2} \right)$$

[2] Se, come nel caso di vincoli indipendenti dal tempo, il fibrato $\boldsymbol{Q}$ è isomorfo ad un fibrato banale $\mathbb{R} \times Q$, allora il fibrato $J^1\boldsymbol{Q}$ è isomorfo al fibrato $\mathbb{R} \times TQ$, ma le strutture naturali delle fibre sono differenti.

Per ogni numero intero $k > 2$ possono definire i fibrati $J^k\boldsymbol{Q}$ ed i prolungamenti $j^k\boldsymbol{\gamma}$. Si può arrivare fino a $J^\infty\boldsymbol{Q}$, che non è più una varietà di dimensione finita[3], e $j^\infty\boldsymbol{\gamma}$.

Definizione 1. *La* derivata formale, o totale, rispetto al tempo *di una funzione* $f : J^k\boldsymbol{Q} \longrightarrow \mathbb{R}$ *è la funzione*

$$\frac{df}{dt} : J^{k+1}\boldsymbol{Q} \longrightarrow \mathbb{R}$$

definita dalla condizione

$$\left(\frac{df}{dt}\right) \circ j^{k+1}\boldsymbol{\gamma} = \frac{d}{dt}\left(f \circ j^k\boldsymbol{\gamma}\right) \qquad \forall \boldsymbol{\gamma} \text{ sezione di } \boldsymbol{Q}$$

In coordinate fibrate naturali si ha:

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \dot{q}^\alpha \frac{\partial f}{\partial q^\alpha} + \ddot{q}^\alpha \frac{\partial f}{\partial \dot{q}^\alpha} + \cdots + q^\alpha_{(k+1)} \frac{\partial f}{\partial q^\alpha_{(k)}} \tag{1}$$

Prima di dare la definizione precisa di sistema lagrangiano, osserviamo che:

1) Se la potenza reattiva virtuale è nulla, cioè se $R_\alpha = 0$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}^\alpha}\right) - \frac{\partial T}{\partial q^\alpha} = F_\alpha \tag{2}$$

[3] $J^\infty\boldsymbol{Q}$ è il limite proiettivo della successione dei $J^k\boldsymbol{Q}$

2) Se la forza ammette potenziale o potenziale generalizzato $U : J^1\boldsymbol{Q} \longrightarrow \mathbb{R}$ si ha:

$$F_\alpha = -\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial U}{\partial \dot{q}^\alpha}\right) + \frac{\partial U}{\partial q^\alpha}$$

Poiché la lagrangiana del sistema è $L = T + U$, possiamo scrivere le equazioni di Lagrange (2) come:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^\alpha}\right) - \frac{\partial L}{\partial q^\alpha} = 0 \tag{3}$$

ottenendo le equazioni di Eulero–Lagrange.

Definizione 2. *Diciamo sistema lagrangiano una coppia* $(\boldsymbol{Q}, L)$ *dove* $\boldsymbol{Q}$ *è un fibrato delle configurazioni e la Lagrangiana* L *è una funzione*

$$L : J^1\boldsymbol{Q} \longrightarrow \mathbb{R}$$

rappresentata in coordinate fibrate naturali con $L = L(t, q^\alpha, \dot{q}^\alpha)$.

Definizione 3. *Definiamo dinamica di un sistema lagrangiano l'insieme delle sezioni di* $J^1\boldsymbol{Q}$ *che soddisfano al seguente sistema di* $2n$ *equazioni:*

$$\begin{cases} \dfrac{dq^i}{dt} = v^\alpha \\[2em] \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial L}{\partial v^\alpha}\right) - \dfrac{\partial L}{\partial q^\alpha} = 0 \end{cases}$$

dove le coordinate fibrate naturali su $J^1\boldsymbol{Q}$ sono state indicate con (t, q^α, v^α) e

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \dot{q}^\alpha \frac{\partial}{\partial q^\alpha} + \dot{v}^\alpha \frac{\partial}{\partial v^\alpha}$$

1.1 Campo di vettori lagrangiano

Scrivendo in dettaglio le equazioni di Eulero–Lagrange (3) associate ad una lagrangiana L si ottiene:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial t} + \dot{q}^\beta \frac{\partial}{\partial q^\beta} + \ddot{q}^\beta \frac{\partial}{\partial \dot{q}^\beta}\right)\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^\alpha}\right) - \frac{\partial L}{\partial q^\alpha} &= \\ \ddot{q}^\beta \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^\beta \partial \dot{q}^\alpha} + \dot{q}^\beta \frac{\partial^2 L}{\partial q^\beta \partial \dot{q}^\alpha} + \frac{\partial^2 L}{\partial t \partial \dot{q}^\alpha} - \frac{\partial L}{\partial q^\alpha} &= 0 \end{aligned} \tag{4}$$

Per scrivere le (4) in forma normale è indispensabile che la matrice simmetrica di componenti

$$M_{\alpha\beta}(t, q, \dot{q}) = \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^\beta \partial \dot{q}^\alpha}\,, \tag{5}$$

ovvero la matrice hessiana di L rispetto alle $\dot{q}^\alpha$, sia invertibile, cioè che si abbia:

$$\det\left(M_{\alpha\beta}\right) = \det\left(\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^\beta \partial \dot{q}^\alpha}\right) \neq 0 \tag{6}$$

Sotto questa condizione, la (4) si può riscrivere come segue

$$\ddot{q}^\sigma = \left(\frac{\partial L}{\partial q^\alpha} - \frac{\partial^2 L}{\partial t\, \partial \dot{q}^\alpha} - \dot{q}^\beta \frac{\partial^2 L}{\partial q^\beta \partial \dot{q}^\alpha}\right) M^{\alpha\sigma} \tag{7}$$

dove con $M^{\alpha\sigma}$ sono state indicate le componenti della matrice (simmetrica) inversa: $M_{\beta\alpha} M^{\alpha\sigma} = \delta^\sigma_\beta$

Definizione 4. *Il* campo di vettori lagrangiano *associato ad una lagrangiana L è il campo di vettori $\vec{X}_L \in \boldsymbol{\mathcal{X}}(J^1\boldsymbol{Q})$ definito da:*

$$\vec{X}_L = \frac{\partial}{\partial t} + \dot{q}^\alpha \frac{\partial}{\partial q^\alpha} + A^\alpha(t, q, \dot{q}) \frac{\partial}{\partial \dot{q}^\alpha} \tag{8}$$

dove si è posto

$$A^\sigma(t, q, \dot{q}) = \left(\frac{\partial L}{\partial q^\alpha} - \frac{\partial^2 L}{\partial t\, \partial \dot{q}^\alpha} - \dot{q}^\beta \frac{\partial^2 L}{\partial q^\beta \partial \dot{q}^\alpha} \right) M^{\alpha\sigma} \tag{9}$$

Il campo lagrangiano gode della seguente proprietà: *le curve integrali di $\vec{X}_L$ sono tutti e soli i prolungamenti $j^1\boldsymbol{\gamma}$ delle sezioni $\boldsymbol{\gamma}$ di $\boldsymbol{Q}$ che sono soluzioni delle equazioni di Eulero–Lagrange* (7).

Ricordiamo infine che in meccanica classica, *nel caso di sistemi olonomi in cui le forze ammettono potenziale, la lagrangiana $L = T + U$, è regolare.* Infatti:

- l'energia cinetica T è un polinomio di secondo grado nelle velocità del tipo

$$T = \frac{1}{2} M_{\alpha\beta}(t, q) \left(\dot{q}^\alpha + V^\alpha(t, q)\right) \left(\dot{q}^\beta + V^\beta(t, q)\right),$$

  dove $M_{\alpha\beta}$ è una forma quadratica definita positiva e V^α è la velocità di trascinamento,

- il potenziale U è un polinomio di primo grado nelle velocità

$$U = U_\alpha(t, q)\dot{q}^\alpha + U_0(t, q).$$

Si ha quindi

$$M_{\alpha\beta} = \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^\beta \partial \dot{q}^\alpha} = \frac{\partial^2 T}{\partial \dot{q}^\beta \partial \dot{q}^\alpha} \qquad \text{con} \qquad \det(M_{\alpha\beta}) > 0$$

1.2 Integrali primi

Definizione 5. *Si dice che una funzione $f : J^1\boldsymbol{Q} \longrightarrow \mathbb{R}$ è* integrale primo, *o una* costante del moto, *di un sistema lagrangiano $(\boldsymbol{Q}, L)$ se la funzione f è costante quando viene calcolata lungo i prolungamenti delle sezoni di $\boldsymbol{Q}$ che sono soluzioni delle equazioni di Eulero–Lagrange, o* equazioni del moto, *della lagrangiana L.*

Si dimostra facilmente che una condizione equivalente alla definizione di f integrale primo è affermare che $\vec{X}_L(f) = 0$. Infatti, si ha che:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\left[f\left(j^1\boldsymbol{\gamma}(t)\right)\right] &= \frac{d}{d\,t}\left[f\left(j^1\boldsymbol{\gamma}(t)\right)\right] \\
&= \frac{\partial f}{\partial t}\left(j^1\boldsymbol{\gamma}(t)\right) + \frac{d\gamma^\alpha(t)}{d\,t}\frac{\partial f}{\partial q^\alpha}\left(j^1\boldsymbol{\gamma}(t)\right) + \frac{d^2\gamma^\alpha(t)}{d\,t^2}\frac{\partial f}{\partial \dot{q}^\alpha}\left(j^1\boldsymbol{\gamma}(t)\right) \\
&= \frac{\partial f}{\partial t}\left(j^1\boldsymbol{\gamma}(t)\right) + \frac{d\gamma^\alpha(t)}{d\,t}\frac{\partial f}{\partial q^\alpha}\left(j^1\boldsymbol{\gamma}(t)\right) + A^\alpha\left(j^1\boldsymbol{\gamma}(t)\right)\frac{\partial f}{\partial \dot{q}^\alpha}\left(j^1\boldsymbol{\gamma}(t)\right) \\
&\quad + \left(\frac{d^2\gamma^\alpha(t)}{d\,t^2} - A^\alpha\left(j^1\boldsymbol{\gamma}(t)\right)\right)\frac{\partial f}{\partial \dot{q}^\alpha}\left(j^1\boldsymbol{\gamma}(t)\right) \\
&= (\vec{X}_L(f)\circ j^1\boldsymbol{\gamma})(t) + \left(\frac{d^2\gamma^\alpha(t)}{d\,t^2} - A^\alpha\left(j^1\boldsymbol{\gamma}(t)\right)\right)\frac{\partial f}{\partial \dot{q}^\alpha}\left(j^1\boldsymbol{\gamma}(t)\right)
\end{aligned} \tag{10}$$

Calcolando ora la (10) lungo una qualunque soluzione $\boldsymbol{\gamma}$ delle equazioni di Eulero–Lagrange, si ha

$$\frac{d^2\gamma^\alpha(t)}{d\,t^2} - A^\alpha\left(j^1\boldsymbol{\gamma}(t)\right) = 0 \tag{11}$$

$$\frac{d}{dt}\left[f\left(j^1\boldsymbol{\gamma}(t)\right)\right] = (\vec{X}_L(f)\circ j^1\boldsymbol{\gamma})(t) \tag{12}$$

Siccome per ogni punto di $J^1\boldsymbol{Q}$ passa una $j^1\boldsymbol{\gamma}(t)$ con $\boldsymbol{\gamma}(t)$ soluzione delle equazioni di Eulero–Lagrange, dalla (10) si deduce che deve essere

$$\vec{X}_L(f) = \frac{\partial f}{\partial t}(t,q,\dot{q}) + \dot{q}^\alpha\frac{\partial f}{\partial q^\alpha}(t,q,\dot{q}) + A^\alpha(t,q,\dot{q})\frac{\partial f}{\partial \dot{q}^\alpha}(t,q,\dot{q}) = 0 \tag{13}$$

Osservando che per una funzione f

$$\vec{X}_L(f) = \mathcal{L}_{\vec{X}_L}(f)$$

si ottiene che f è una costante del moto se e solo se $\mathcal{L}_{\vec{X}_L}(f) = 0$.

Usando la derivata di Lie $\mathcal{L}_{\vec{X}_L}$, il concetto di invarianza può essere esteso anche ad altri oggetti ω, quali forme e tensori, dicendo che l'oggetto ω è invariante lungo le curve integrali del campo lagrangiano $\vec{X}_L$ se e solo se $\mathcal{L}_{\vec{X}_L}(\omega) = 0$.

2 Principio di minima azione

Lo scopo di questo paragrafo è di dimostrare che le curve soluzioni delle equazioni di Eulero–Lagrange sono punti stazionari dell'azione $\mathcal{A}(\boldsymbol{\gamma})$ associata ad una lagrangiana L.

Sia $\boldsymbol{\Xi}$ l'insieme delle sezioni

$$\boldsymbol{\gamma} : [t_1, t_2] \longrightarrow \boldsymbol{Q}$$

di classe almeno C^2 (le cui derivate negli estremi t_1 e t_2 sono i limiti delle derivate) a estremi fissati $P_1 \in Q_{t_1}$ e $P_2 \in Q_{t_2}$ (cioè: $\boldsymbol{\gamma}(t_1) = (t_1, P_1)$ e $\boldsymbol{\gamma}(t_2) = (t_2, P_2)$).

Per ogni lagrangiana L, l'azione $\mathcal{A} : \boldsymbol{\Xi} \longrightarrow \mathbb{R}$ è definita nel modo seguente

$$\boldsymbol{\gamma} \longmapsto \mathcal{A}(\boldsymbol{\gamma}) = \int_{t_1}^{t_2} (L \circ j^1\boldsymbol{\gamma})(t)dt = \int_{t_1}^{t_2} L\left(t, \gamma(t), \frac{d\gamma(t)}{dt}\right) dt$$

ovvero $\mathcal{A}$ associa alla sezione $\boldsymbol{\gamma}$ l'integrale fra t_1 e t_2 della Lagrangiana $L = L(t, q, \dot{q})$ calcolata lungo il prolungamento $j^1\boldsymbol{\gamma}$. Noi dobbiamo scoprire quali sono le curve $\boldsymbol{\gamma}$ che corrispondono ai punti stazionari di $\mathcal{A}$.

Premettiamo qualche considerazione, per capire come possiamo cercare i punti stazionari (in particolare, i minimi) di $\mathcal{A}$. Se $\mathcal{A}$ fosse un campo scalare differenziabile definito su un sottoinsieme aperto $U \subseteq \mathbb{R}^2$, potremmo utilizzare diversi approcci equivalenti.

1) Calcolare la derivata $D\mathcal{A}$ e trovare i punti $P \in U$ in cui si annulla.

2) Considerare un punto $P \in U$ e restringere $\mathcal{A}$ a tutte le rette passanti per P: il punto P è un punto stazionario di $\mathcal{A}$ se e solo se la restrizione di $\mathcal{A}$ ad ogni retta passante per P ha punto

stazionario in P.

3) Considerare un punto $P \in U$ e restringere $\mathcal{A}$ a tutte le curve differenziabili passanti per P: il punto P è un punto stazionario di $\mathcal{A}$ se e solo se la restrizione di $\mathcal{A}$ ad ogni curva differenziabile passante per P ha punto stazionario in P.

Sullo spazio $\boldsymbol{\Xi}$ si può introdurre una struttura di varietà di dimensione infinita, ma noi procederemo in modo tale da poter lavorare su $\boldsymbol{\Xi}$ senza far entrare in gioco la sua struttura di di varietà di dimensione infinita. È noto che per fare questo è sufficiente definire in modo "ragionevole" quali sono le curve differenziabili in $\boldsymbol{\Xi}$.

Adattiamo dunque il terzo procedimento. Consideriamo un intervallo aperto $I \subseteq \mathbb{R}$, con $0 \in I$, ed una generica curva su $\boldsymbol{\Xi}$, dominio di $\mathcal{A}$

$$I \longrightarrow \boldsymbol{\Xi}$$

$$\varepsilon \longmapsto \boldsymbol{\gamma}_\varepsilon$$

Definizione 6. *Diciamo che la curva $\varepsilon \mapsto \boldsymbol{\gamma}_\varepsilon$ in $\boldsymbol{\Xi}$ è di classe C^k se la funzione di due variabili $\tilde{\boldsymbol{\gamma}} : I \times [t_1, t_2] \longrightarrow \boldsymbol{Q}$ definita da*

$$\tilde{\boldsymbol{\gamma}}(\varepsilon, t) = \boldsymbol{\gamma}_\varepsilon(t)$$

è di classe C^k.

In coordinate fibrate, la funzione $\boldsymbol{\gamma}_\varepsilon : [t_1, t_2] \longrightarrow \boldsymbol{Q}$ è definita da

$$t \longmapsto (t, \gamma^\alpha_\varepsilon(t)) = (t, \tilde{\gamma}^\alpha(\varepsilon, t))$$

con le curve $\gamma_\varepsilon(t)$ che devono soddisfare la condizione

$$\forall \varepsilon \quad \gamma_\varepsilon(t_1) = P_1 \;\wedge\; \gamma_\varepsilon(t_2) = P_2$$

e, quindi, la funzione $\tilde{\gamma}(\varepsilon, t)$ deve soddisfare la condizione

$$\forall \varepsilon \quad \tilde{\gamma}(\varepsilon, t_1) = P_1 \;\wedge\; \tilde{\gamma}(\varepsilon, t_2) = P_2$$

Per calcolare

$$\left.\frac{d\mathcal{A}(\boldsymbol{\gamma}_\varepsilon)}{d\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0}.$$

osserviamo, innanzitutto, che

$$\mathcal{A}(\boldsymbol{\gamma}_\varepsilon) = \int_{t_2}^{t_1} L\left(t, \gamma_\varepsilon(t), \frac{d\gamma_\varepsilon(t)}{dt}\right) dt = \int_{t_2}^{t_1} L\left(t, \tilde{\gamma}(\varepsilon, t), \frac{\partial \tilde{\gamma}(\varepsilon, t)}{\partial t}\right) dt$$

Inoltre, se $\tilde{\boldsymbol{\gamma}}$ e L sono almeno di classe C^2 allora la funzione di due variabili $L\left(t, \tilde{\gamma}(\varepsilon, t), \frac{\partial \tilde{\gamma}(\varepsilon,t)}{\partial t}\right)$ è almeno di classe C^1 e quindi, per il teorema di derivazione sotto il segno di integrale, possiamo scrivere:

$$\frac{d\mathcal{A}(\gamma_\varepsilon)}{d\varepsilon} \;=\; \frac{d}{d\varepsilon}\int_{t_2}^{t_1} L\left(t, \tilde{\gamma}(\varepsilon, t), \frac{\partial \tilde{\gamma}(\varepsilon, t)}{\partial t}\right) dt$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_{t_2}^{t_1} \frac{\partial}{\partial \varepsilon}\left[L\left(t, \tilde{\gamma}(\varepsilon,t), \frac{\partial \tilde{\gamma}(\varepsilon,t)}{\partial t}\right)\right] dt \\
&= \int_{t_2}^{t_1} \left[\frac{\partial L}{\partial q^\alpha}\left(t, \tilde{\gamma}(\varepsilon,t), \frac{\partial \tilde{\gamma}(\varepsilon,t)}{\partial t}\right)\frac{\partial \tilde{\gamma}^\alpha(\varepsilon,t)}{\partial \varepsilon} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^\alpha}\left(t, \tilde{\gamma}(\varepsilon,t), \frac{\partial \tilde{\gamma}(\varepsilon,t)}{\partial t}\right)\frac{\partial^2 \tilde{\gamma}^\alpha(\varepsilon,t)}{\partial \varepsilon \partial t}\right] dt
\end{aligned}
$$

Siccome

$$
\frac{\partial^2 \tilde{\gamma}^\alpha(\varepsilon,t)}{\partial \varepsilon \partial t} = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial \tilde{\gamma}^\alpha(\varepsilon,t)}{\partial \varepsilon}\right)
$$

si ha

$$
\begin{aligned}
& \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial L}{\partial q^\alpha}\left(t, \tilde{\gamma}(\varepsilon,t), \frac{\partial \tilde{\gamma}(\varepsilon,t)}{\partial t}\right)\frac{\partial \tilde{\gamma}^\alpha(\varepsilon,t)}{\partial \varepsilon} dt + \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^\alpha}\left(t, \tilde{\gamma}(\varepsilon,t), \frac{\partial \tilde{\gamma}(\varepsilon,t)}{\partial t}\right)\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial \tilde{\gamma}^\alpha(\varepsilon,t)}{\partial \varepsilon}\right) dt \\
= & \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial L}{\partial q^\alpha}\left(t, \tilde{\gamma}(\varepsilon,t), \frac{\partial \tilde{\gamma}(\varepsilon,t)}{\partial t}\right)\frac{\partial \tilde{\gamma}^\alpha(\varepsilon,t)}{\partial \varepsilon} dt \\
& + \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^\alpha}\left(t, \tilde{\gamma}(\varepsilon,t), \frac{\partial \tilde{\gamma}(\varepsilon,t)}{\partial t}\right)\frac{\partial \tilde{\gamma}^\alpha(\varepsilon,t)}{\partial \varepsilon}\right]_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^\alpha}\left(t, \tilde{\gamma}(\varepsilon,t), \frac{\partial \tilde{\gamma}(\varepsilon,t)}{\partial t}\right)\right]\frac{\partial \tilde{\gamma}^\alpha(\varepsilon,t)}{\partial \varepsilon} dt \\
= & \int_{t_1}^{t_2} \left\{\frac{\partial L}{\partial q^\alpha}\left(t, \tilde{\gamma}(\varepsilon,t), \frac{\partial \tilde{\gamma}(\varepsilon,t)}{\partial t}\right) - \frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^\alpha}\left(t, \tilde{\gamma}(\varepsilon,t), \frac{\partial \tilde{\gamma}(\varepsilon,t)}{\partial t}\right)\right]\right\}\frac{\partial \tilde{\gamma}^\alpha(\varepsilon,t)}{\partial \varepsilon} dt
\end{aligned}
$$

dove si è sfruttato il fatto che

$$
\left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^\alpha}\left(t, \tilde{\gamma}(\varepsilon,t), \frac{\partial \tilde{\gamma}(\varepsilon,t)}{\partial t}\right)\frac{\partial \tilde{\gamma}^\alpha(\varepsilon,t)}{\partial \varepsilon}\right]_{t_1}^{t_2} = 0
$$

in quanto $\forall \varepsilon$ si ha $\tilde{\gamma}(\varepsilon, t_1) = P_1$ e $\tilde{\gamma}(\varepsilon, t_2) = P_2$ e di conseguenza

$$
\frac{\partial \tilde{\gamma}}{\partial \varepsilon}(\varepsilon, t_1) = 0 \qquad \text{e} \qquad \frac{\partial \tilde{\gamma}}{\partial \varepsilon}(\varepsilon, t_2) = 0.
$$

Posto $\bar{\gamma}(t) = \tilde{\gamma}(0,t)$ e $\delta\bar{\gamma}(t) = \frac{\partial\tilde{\gamma}}{\partial\varepsilon}(0,t)$, si ha:

$$\left.\frac{d\mathcal{A}(\gamma_\varepsilon)}{d\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0} = \int_{t_1}^{t_2} \left\{ \frac{\partial L}{\partial q^\alpha}\left(t, \bar{\gamma}(t), \frac{d\bar{\gamma}(t)}{dt}\right) - \frac{d}{dt}\left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^\alpha}\left(t, \bar{\gamma}(t), \frac{d\bar{\gamma}(t)}{dt}\right)\right]\right\} \delta\bar{\gamma}^\alpha(t)dt \tag{14}$$

Affinché $\bar{\boldsymbol{\gamma}}$ sia un punto critico per l'azione $\mathcal{A}$, la (14) deve annullarsi per ogni scelta delle $\delta\bar{\gamma}^\alpha$ che siano almeno continue e tali che

$$\begin{cases} \delta\bar{\gamma}^\alpha(t_1) = \dfrac{\partial\tilde{\gamma}}{\partial\varepsilon}(0,t_1) = 0 \\ \\ \delta\bar{\gamma}^\alpha(t_2) = \dfrac{\partial\tilde{\gamma}}{\partial\varepsilon}(0,t_2) = 0 \end{cases}$$

Di conseguenza devono necessariamente annullarsi tutti i coefficienti all'interno delle parentesi graffe della (14), cioè, per ogni indice α e $\forall t \in [t_1, t_2]$ deve essere:

$$\frac{\partial L}{\partial q^\alpha}\left(t, \bar{\gamma}(t), \frac{d\bar{\gamma}(t)}{dt}\right) - \frac{d}{dt}\left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^\alpha}\left(t, \bar{\gamma}(t), \frac{d\bar{\gamma}(t)}{dt}\right)\right] = 0 \tag{15}$$

Supponendo, ad esempio, che per $\alpha = 1$ la (15) non valga, possiamo scegliere $\delta\bar{\gamma}^\alpha(t) \equiv 0$ per ogni $\alpha > 1$ e costruire[4] la funzione $\delta\bar{\gamma}^1(t)$ in modo tale da ottenere un risultato positivo per l'integrale (14).

La (15) può essere riscritta, utilizzando la derivata formale (1), nel seguente modo

$$\frac{\partial L}{\partial q^\alpha} \circ j^1\bar{\boldsymbol{\gamma}} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^\alpha} \circ j^1\bar{\boldsymbol{\gamma}}\right) = \left[\frac{\partial L}{\partial q^\alpha} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^\alpha}\right)\right] \circ j^2\bar{\boldsymbol{\gamma}} = 0 \tag{16}$$

[4] per esempio con funzioni di classe C^∞ a campana

da cui si deduce infine che la sezione $\bar{\gamma}(t)$ è un punto critico dell'azione $\mathcal{A}$ se e solo se è una soluzione delle equazioni di Eulero–Lagrange

$$\frac{\partial L}{\partial q^\alpha} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^\alpha}\right) = 0$$

Le precedenti considerazioni si concretizzano nel seguente teorema.

Teorema 1 (Principio dell'azione stazionaria)**.** *La dinamica di un sistema lagrangiano* $(\boldsymbol{Q}, L)$ *è costituita da tutte e sole le sezioni della varietà fibrata* $\boldsymbol{Q}$ *che sono punti critici dell'azione* $\mathcal{A}$*, per variazioni ad estremi fissati.*