Appunti di Meccanica hamiltoniana

Marco Ferraris

maggio 2022

1 Fibrato delle fasi

Definizione 1.1. *Dato un fibrato delle configurazioni*

$$\boldsymbol{Q} = \bigcup_{t \in \mathbb{R}} \{t\} \times Q_t$$

il fibrato verticale $\boldsymbol{VQ}$ di $\boldsymbol{Q}$ *è sottofibrato vettoriale di* $\boldsymbol{TQ}$ *composto dai vettori che sono verticali per la proiezione* $\chi : \boldsymbol{Q} \to \mathbb{R}$*. I vettori che appartengono a* $\boldsymbol{VQ}$ *vengono anche detti* spostamenti virtuali.

Considerando il diagramma commutativo

$$\begin{tikzcd}
T\boldsymbol{Q} \arrow[r, "T(\chi)"] \arrow[d, "\tau_{\boldsymbol{Q}}"'] & T\mathbb{R} \arrow[d, "\tau_{\mathbb{R}}"] \\
\boldsymbol{Q} \arrow[r, "\chi"'] & \mathbb{R}
\end{tikzcd}$$

e definendo $V_x\boldsymbol{Q} = \ker(T_x\chi)$, possiamo scrivere

$$\boldsymbol{VQ} = \bigcup_{x\in\boldsymbol{Q}} V_x\boldsymbol{Q} = \bigcup_{t\in\mathbb{R}} \{t\} \times TQ_t$$

Quando il fibrato delle configurazioni è $\boldsymbol{Q} = \mathbb{R} \times Q$ allora si ha $\boldsymbol{VQ} = \mathbb{R} \times TQ$.

Le coordinate fibrate naturali (t, q^α, v^α) su $\boldsymbol{VQ}$ sono costruite aggiungendo alle coordinate fibrate (t, q^α) di un punto $x \in \boldsymbol{Q}$ le componenti v^α del vettore verticale $\vec{\boldsymbol{v}} \in V_x\boldsymbol{Q}$ (rispetto al sistema di coordinate fibrate (t, q^α)). Le trasformazioni di coordinate fibrate naturali su $\boldsymbol{VQ}$ sono del tipo

$$\begin{pmatrix} t \\ q^\alpha \\ v^\alpha \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} t' & = & \phi'(t) \\ q'^{\alpha'} & = & \Phi'^{\alpha'}(t, q) \\ v'^{\alpha'} & = & v^\alpha \Phi'^{\alpha'}_{\alpha}(t, q) \end{pmatrix} \tag{1}$$

dove

$$\Phi'^{\alpha'}_{\alpha}(t,q) = \frac{\partial \Phi'^{\alpha'}}{\partial q^{\alpha}}(t,q)$$

Definizione 1.2. *Il* fibrato delle fasi *di un fibrato delle configurazioni* $\boldsymbol{Q}$ *è il fibrato vettoriale duale* $\boldsymbol{PQ} = \boldsymbol{V}^*\boldsymbol{Q}$ *del fibrato verticale* $\boldsymbol{VQ}$.

In formule, possiamo scrivere

$$\boldsymbol{V}^*\boldsymbol{Q} = \bigcup_{x\in\boldsymbol{Q}} V^*_x\boldsymbol{Q} = \bigcup_{t\in\mathbb{R}} \{t\} \times T^*Q_t$$

Se il fibrato delle configurazioni è $\boldsymbol{Q} = \mathbb{R} \times Q$ allora si ha $\boldsymbol{V}^*\boldsymbol{Q} = \mathbb{R} \times T^*Q$.

Le coordinate fibrate naturali $(t, q^{\alpha}, p_{\alpha})$ su $\boldsymbol{V}^*\boldsymbol{Q}$ sono costruite aggiungendo alle coordinate fibrate (t, q^{α}) di un punto $x \in \boldsymbol{Q}$ le componenti p_{α} del covettore "verticale" $\underline{\boldsymbol{p}} \in V^*_x\boldsymbol{Q}$ (rispetto al sistema di coordinate fibrate (t, q^{α})). Le trasformazioni di coordinate fibrate naturali su $\boldsymbol{V}^*\boldsymbol{Q}$ sono del tipo

$$\begin{pmatrix} t \\ \\ q^{\alpha} \\ \\ p_{\alpha} \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} t' & = & \phi'(t) \\ \\ q'^{\alpha'} & = & \Phi'^{\alpha'}(t,q) \\ \\ p'_{\alpha'} & = & p_{\alpha}\Phi^{\alpha}_{\alpha'}(t,q) \end{pmatrix} \tag{2}$$

dove

$$\Phi^{\alpha}_{\alpha'}(t,q) = \frac{\partial \Phi^{\alpha}}{\partial q'^{\alpha'}}\left(\phi'(t), \Phi'(t,q)\right) \qquad \wedge \qquad \Phi^{\alpha}_{\alpha'}(t,q)\,\Phi'^{\alpha'}_{\beta}(t,q) = \delta^{\alpha}_{\beta}$$

Ricordiamo che una trasformazione di coordinate fibrate naturali su $J^1\boldsymbol{Q}$ è ([1])

$$\begin{pmatrix} t \\ \\ q^\alpha \\ \\ \dot q^\alpha \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} t' & = & \phi'(t) \\ \\ q'^{\alpha'} & = & \Phi'^{\alpha'}(t,q) \\ \\ \dot q'^{\alpha'} & = & \left[\Phi'^{\alpha'}_0(t,q) + \dot q^\alpha \Phi'^{\alpha'}_\alpha(t,q)\right] \left[\frac{d\phi'(t)}{dt}\right]^{-1} \end{pmatrix} \tag{3}$$

dove

$$\Phi'^{\alpha'}_0(t,q) = \frac{\partial \Phi'^{\alpha'}}{\partial t}(t,q)$$

2 Trasformata di Legendre

La 1–forma lagrangiana $\underline{\boldsymbol{L}} = L(t, q^\alpha, \dot q^\alpha)\, d\,t$ è definita sul fibrato delle velocità $J^1\boldsymbol{Q}$ e viene utilizzata, tra l'altro, per calcolare l'azione

$$\mathcal{A}(\boldsymbol{\gamma}) = \int_{t_1}^{t_2} (j^1\boldsymbol{\gamma})^*(\underline{\boldsymbol{L}}) = \int_{t_1}^{t_2} \left(L \circ j^1\boldsymbol{\gamma}\right)\, dt = \int_{t_1}^{t_2} L\left(t, \gamma^\alpha(t), \frac{d\gamma^\alpha(t)}{d\,t}\right)\, dt \tag{4}$$

[1] Formalmente, e con le dovute cautele, si può scrivere

$$\dot q'^{\alpha'} = \frac{dq'^{\alpha'}}{dt'} = \frac{dq'^{\alpha'}}{dt}\frac{dt}{dt'} = \left(\frac{\partial q'^{\alpha'}}{\partial t} + \frac{\partial q'^{\alpha'}}{\partial q^\alpha}\dot q^\alpha\right)\left(\frac{dt'}{dt}\right)^{-1}$$

che deve essere indipendente dal sistema di coordinate fibrate naturali considerato ([2]). Questo significa che, per qualunque trasformazione di coordinate fibrate naturali, deve essere

$$L(t, q^\alpha, \dot q^\alpha)\, dt = L'(t', q'^{\alpha'}, \dot q'^{\alpha'})\, dt' \tag{5}$$

Sostituendo la (3) nella (5), si ha:

$$L(t, q^\alpha, \dot q^\alpha) = L'\left(\phi'(t), \Phi'^{\alpha'}(t,q), \left[\Phi'^{\alpha'}_{0}(t,q) + \dot q^\alpha \Phi'^{\alpha'}_{\alpha}(t,q)\right] \left[\tfrac{d\phi'(t)}{dt}\right]^{-1}\right) \frac{d\phi'(t)}{dt} \tag{6}$$

e calcolando i momenti coniugati della lagrangiana L si ottiene

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial \dot q^\sigma} &= \frac{d\phi'(t)}{dt}\frac{\partial L'}{\partial \dot q'^{\sigma'}}(\cdots)\frac{\partial \dot q'^{\sigma'}}{\partial \dot q^\sigma} \\ &= \frac{d\phi'(t)}{dt}\frac{\partial L'}{\partial \dot q'^{\sigma'}}(\cdots)\Phi'^{\sigma'}_{\sigma}(t,q)\left[\frac{d\phi'(t)}{dt}\right]^{-1} \\ &= \frac{\partial L'}{\partial \dot q'^{\sigma'}}(\cdots)\Phi'^{\sigma'}_{\sigma}(t,q). \end{aligned} \tag{7}$$

I momenti coniugati di L si trasformano quindi come le componenti di un oggetto che sta in $\boldsymbol{V}^*\boldsymbol{Q}$ ([3]).

[2]Attenzione! Quando si considerano trasformazioni di coordinate fibrate che dipendono dal tempo, la lagrangiana $L(t, q, \dot q)$ è il coefficiente di una 1–forma orizzontale e non una funzione a valori scalari.

[3]Sempre formalmente, e con le dovute cautele, possiamo scrivere

$$p_\alpha = p'_{\alpha'}\frac{\partial q'^{\alpha'}}{\partial q^\alpha}$$

Definizione 2.1. *La* trasformata di Legendre *associata ad un sistema lagrangiano* $(\boldsymbol{Q}, L)$ *è la funzione* $\Phi_L : J^1\boldsymbol{Q} \longrightarrow \boldsymbol{PQ}$ *che in coordinate fibrate naturali è definita da*

$$\Phi_L : \begin{pmatrix} t \\ \\ q^\alpha \\ \\ \dot{q}^\alpha \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} t & = & t \\ \\ q^\alpha & = & q^\alpha \\ \\ p_\alpha & = & \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^\alpha} \end{pmatrix} \tag{8}$$

Diremo che la lagrangiana L *è* regolare *se la trasformata di Legendre* Φ_L *è localmente invertibile. Quando la trasformata di Legendre è invertibile diremo che la lagrangiana* L *è* iperregolare.

Per il teorema della funzione inversa, la condizione di regolarità sulla lagrangiana $L\,(t, q^\alpha, \dot{q}^\alpha)$, equivale a chiedere che:

$$\det\left(\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^\alpha \partial \dot{q}^\beta}\right) \neq 0 \tag{9}$$

Osservazione 2.1. Ricordando che $(\Phi_L)^* = (\Phi_L^{-1})_*$ e che $(\Phi_L)_* = (\Phi_L^{-1})^*$, mediante il diffeomorfismo Φ_L, ed il suo inverso Φ_L^{-1}, possiamo trasformare oggetti geometrici che "vivono" su $J^1\boldsymbol{Q}$ in oggetti dello stesso tipo su $\boldsymbol{PQ}$, e viceversa. Ad esempio:

- Una curva $\gamma : \mathbb{R} \to J^1\boldsymbol{Q}$ viene trasformata in una curva $\sigma = (\Phi_L)_*(\gamma) = \Phi_L \circ \gamma : \mathbb{R} \to \boldsymbol{PQ}$. La curva γ è una sezione del fibrato $J^1\boldsymbol{Q} \to \mathbb{R}$ se e solo se la sua immagine σ è una sezione del fibrato $\boldsymbol{PQ} \to \mathbb{R}$. Ovviamente si ha $\gamma = (\Phi_L)^*(\sigma) = \Phi_L^{-1} \circ \sigma : \mathbb{R} \to J^1\boldsymbol{Q}$.

- Una curva $\gamma : \mathbb{R} \to J^1\boldsymbol{Q}$ è una curva integrale di un campo di vettori $\vec{\boldsymbol{X}} \in \mathfrak{X}(J^1\boldsymbol{Q})$ se e solo se la curva immagine $\sigma = (\Phi_L)_*(\gamma)$ è una curva integrale del campo di vettori $\vec{\boldsymbol{Y}} = (\Phi_L)_*(\vec{\boldsymbol{X}}) \in \mathfrak{X}(\boldsymbol{PQ})$.
- Una funzione $f : J^1\boldsymbol{Q} \to \mathbb{R}$ è un integrale primo di un campo di vettori $\vec{\boldsymbol{X}} \in \mathfrak{X}(J^1\boldsymbol{Q})$ se e solo se la funzione immagine $(\Phi_L)_*(f) = f \circ \Phi_L^{-1} : \boldsymbol{PQ} \to \mathbb{R}$ è un integrale primo per il campo di vettori $\vec{\boldsymbol{Y}} = (\Phi_L)_*(\vec{\boldsymbol{X}}) \in \mathfrak{X}(\boldsymbol{PQ})$.

Osservazione 2.2. Quando il fibrato delle configurazioni è $\boldsymbol{Q} = \mathbb{R} \times Q$ allora si può pensare che la trasformata di Legendre sia una funzione

$$\Phi_L : \mathbb{R} \times TQ \to \mathbb{R} \times T^*Q$$

perché, in questo caso, il fibrato delle delle fasi $J^1\boldsymbol{Q}$ è isomorfo, ma non in modo naturale, al fibrato $\mathbb{R} \times TQ$ ([4]).

Quando vale la (9), le equazioni di Lagrange si possano scrivere in forma normale

$$\ddot{q}^\alpha = A^\alpha(t, q^\sigma, \dot{q}^\sigma) \tag{10}$$

e possiamo definire il campo di vettori lagrangiano

$$\vec{\boldsymbol{X}}_L = \frac{\partial}{\partial t} + \dot{q}^\alpha \frac{\partial}{\partial q^\alpha} + A^\alpha(t, q^\sigma, \dot{q}^\sigma) \frac{\partial}{\partial \dot{q}^\alpha} \tag{11}$$

[4] L'isomorfismo non è naturale perché il fibrato $\mathbb{R} \times TQ \to \mathbb{R} \times Q$ è un fibrato vettoriale, mentre il fibrato $J^1(\mathbb{R} \times Q) \to \mathbb{R} \times Q$ è un fibrato affine

I coefficienti $A^\alpha(t, q^\sigma, \dot q^\sigma)$ sono definiti, come al solito, da

$$A^\alpha = M^{\alpha\sigma}\left(\frac{\partial L}{\partial q^\sigma} - \frac{\partial^2 L}{\partial t \partial \dot q^\sigma} - \dot q^\gamma \frac{\partial^2 L}{\partial q^\gamma \partial \dot q^\sigma}\right) \tag{12}$$

con

$$M^{\alpha\sigma}\frac{\partial^2 L}{\partial \dot q^\sigma \partial \dot q^\beta} = \delta^\alpha_\beta \tag{13}$$

Osservazione 2.3. Se la lagrangiana ed i vincoli non dipendono esplicitamente dal tempo si può supporre che la trasformata di Legendre sia una funzione

$$\Phi_L : TQ \to T^*Q\,,$$

che il campo lagrangiano sia un campo di vettori su TQ definito da

$$\vec{\boldsymbol{X}}_{\scriptscriptstyle L} = \dot q^\alpha \frac{\partial}{\partial q^\alpha} + A^\alpha(q^\sigma, \dot q^\sigma)\frac{\partial}{\partial \dot q^\alpha}$$

con

$$A^\alpha = M^{\alpha\sigma}\left(\frac{\partial L}{\partial q^\sigma} - \dot q^\gamma \frac{\partial^2 L}{\partial q^\gamma \partial \dot q^\sigma}\right)$$

3 Campo vettoriale hamiltoniano ed equazioni di Hamilton

Definizione 3.1. *Il* campo di vettori hamiltoniano *associato ad una lagrangiana iperregolare L è il campo di vettori sul fibrato delle fasi $\boldsymbol{PQ}$ che si ottiene come immagine*

$$\vec{\boldsymbol{X}}_{\scriptscriptstyle H} = (\Phi_L)_*\left(\vec{\boldsymbol{X}}_{\scriptscriptstyle L}\right) = T(\Phi_L)\circ \vec{\boldsymbol{X}}_{\scriptscriptstyle L} \circ \Phi_L^{-1} \tag{14}$$

del campo lagrangiano $\vec{\boldsymbol{X}}_{L}$ attraverso la trasformata di Legendre Φ_L.

Sappiamo che il seguente diagramma

$$\begin{tikzcd}
T(J^1\boldsymbol{Q}) \arrow[r, "T\Phi_L"] \arrow[d, "\tau_{J^1\boldsymbol{Q}}"] & T(\boldsymbol{PQ}) \arrow[d, "\tau_{\boldsymbol{PQ}}"'] \\
J^1\boldsymbol{Q} \arrow[u, bend left, "\vec{\boldsymbol{X}}_{L}"] \arrow[r, "\Phi_L"'] & \boldsymbol{PQ} \arrow[u, bend right, "\vec{\boldsymbol{X}}_{H}"']
\end{tikzcd}$$

è commutativo e che, in coordinate fibrate naturali, possiamo scrivere:

$$\begin{aligned}
\vec{\boldsymbol{X}}_{H} &= \left(\vec{\boldsymbol{X}}_{L}(t)\circ\Phi_L^{-1}\right)\frac{\partial}{\partial t} + \left(\vec{\boldsymbol{X}}_{L}(q^\alpha)\circ\Phi_L^{-1}\right)\frac{\partial}{\partial q^\alpha} + \left(\vec{\boldsymbol{X}}_{L}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^\beta}\right)\circ\Phi_L^{-1}\right)\frac{\partial}{\partial p_\beta} \\
&= \frac{\partial}{\partial t} + \left(\vec{\boldsymbol{X}}_{L}(q^\alpha)\circ\Phi_L^{-1}\right)\frac{\partial}{\partial q^\alpha} + \left(\vec{\boldsymbol{X}}_{L}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^\beta}\right)\circ\Phi_L^{-1}\right)\frac{\partial}{\partial p_\beta} \qquad (15)
\end{aligned}$$

Definizione 3.2. *La* hamiltoniana associata alla lagrangiana L *è la funzione definita da*

$$H = \left(\dot{q}^\alpha\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^\alpha} - L\right)\circ\Phi_L^{-1} \qquad (16)$$

o, equivalentemente, definita in maniera implicita da

$$H\circ\Phi_L = \dot{q}^\alpha\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^\alpha} - L\,, \qquad (17)$$

In coordinate fibrate naturali, la funzione ([5]) $H(t, q^\sigma, p_\sigma)$ è definita implicitamente da

$$H\left(t, q^\alpha, \frac{\partial L}{\partial \dot q^\alpha}(t, q^\sigma, \dot q^\sigma)\right) = \dot q^\alpha \frac{\partial L}{\partial \dot q^\alpha}(t, q^\sigma, \dot q^\sigma) - L\left(t, q^\sigma, \dot q^\sigma\right) . \tag{18}$$

Calcolando le derivate parziali della (18), si ottiene

$$\begin{aligned}
\left(\frac{\partial H}{\partial p_\alpha} \circ \Phi_L\right) \frac{\partial^2 L}{\partial \dot q^\alpha \partial \dot q^\sigma} &= \delta^\alpha_\sigma \frac{\partial L}{\partial \dot q^\alpha} + \dot q^\alpha \frac{\partial^2 L}{\partial \dot q^\sigma \partial \dot q^\alpha} - \frac{\partial L}{\partial \dot q^\sigma} \\
&= \dot q^\alpha \frac{\partial^2 L}{\partial \dot q^\alpha \partial \dot q^\sigma} && (19) \\
\frac{\partial H}{\partial q^\sigma} \circ \Phi_L + \left(\frac{\partial H}{\partial p_\alpha} \circ \Phi_L\right) \frac{\partial^2 L}{\partial \dot q^\alpha \partial q^\sigma} &= \dot q^\alpha \frac{\partial^2 L}{\partial \dot q^\alpha \partial q^\sigma} - \frac{\partial L}{\partial q^\sigma} && (20) \\
\frac{\partial H}{\partial t} \circ \Phi_L + \left(\frac{\partial H}{\partial p_\alpha} \circ \Phi_L\right) \frac{\partial^2 L}{\partial \dot q^\alpha \partial t} &= \dot q^\alpha \frac{\partial^2 L}{\partial \dot q^\alpha \partial t} - \frac{\partial L}{\partial t} && (21)
\end{aligned}$$

Tenendo conto della condizione di regolarità, la (19) si risolve facilmente ottenendo

$$\frac{\partial H}{\partial p_\alpha} \circ \Phi_L = \dot q^\alpha \tag{22}$$

Sostituendo la (22) nella (20) e nella (21) si ottiene

$$\begin{aligned}
\frac{\partial H}{\partial q^\sigma} \circ \Phi_L &= -\frac{\partial L}{\partial q^\sigma} && (23) \\
\frac{\partial H}{\partial t} \circ \Phi_L &= -\frac{\partial L}{\partial t} && (24)
\end{aligned}$$

[5] Attenzione! In generale, quando si considerano trasformazioni di coordinate fibrate che dipendono dal tempo, la hamiltoniana $H(t, q, p)$ non è una funzione $H : \boldsymbol{PQ} \longrightarrow \mathbb{R}$ a valori scalari, ma è uno dei coefficienti di una 1–forma su $\boldsymbol{PQ}$ (vedi la formula (33) più avanti).

Ricordando che i coefficienti A^α definiti in (12) ed il campo lagrangiano $\vec{\boldsymbol{X}}_{L}$ sono definiti in modo tale che valgano le identità

$$\vec{\boldsymbol{X}}_{L}\left(q^\beta\right) \equiv \dot{q}^\beta \qquad \wedge \qquad \vec{\boldsymbol{X}}_{L}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^\beta}\right) \equiv \frac{\partial L}{\partial q^\beta}$$

deduciamo infine che il campo hamiltoniano ha la seguente espressione:

$$\boxed{\vec{\boldsymbol{X}}_{H} = \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial H}{\partial p_\alpha}\frac{\partial}{\partial q^\alpha} - \frac{\partial H}{\partial q^\beta}\frac{\partial}{\partial p_\beta}} \tag{25}$$

Osservazione 3.1. Se la lagrangiana ed i vincoli non dipendono esplicitamente dal tempo, allora anche la hamiltoniana non dipende esplicitamente dal tempo e si può supporre che il campo hamiltoniano sia un campo di vettori su T^*Q definito da

$$\boxed{\vec{\boldsymbol{X}}_{H} = \frac{\partial H}{\partial p_\alpha}\frac{\partial}{\partial q^\alpha} - \frac{\partial H}{\partial q^\beta}\frac{\partial}{\partial p_\beta}}$$

Definizione 3.3. *Le* equazioni canoniche di Hamilton *sono le equazioni a cui soddisfano le sezioni del fibrato delle fasi* $\boldsymbol{PQ} \longrightarrow \mathbb{R}$ *che sono curve integrali del campo hamiltoniano* $\vec{\boldsymbol{X}}_{H}$*. Una sezione* $\underline{\boldsymbol{\sigma}} : \mathbb{R} \to \boldsymbol{PQ}$

$$\underline{\boldsymbol{\sigma}} : t \mapsto (t, \gamma^\alpha(t), \pi_\alpha(t))$$

è una curva integrale del campo hamiltoniano $\vec{\boldsymbol{X}}_{H}$ *definito dalla* (25) *se e solo se*

$$\frac{d\,\gamma^\alpha(t)}{d\,t} = \frac{\partial H}{\partial p_\alpha}\left(t, \gamma^\beta(t), \pi_\beta(t)\right) \tag{26}$$

$$\frac{d\,\pi_\alpha(t)}{d\,t} = -\frac{\partial H}{\partial q^\alpha}\big(t,\gamma^\beta(t),\pi_\beta(t)\big) \tag{27}$$

Cioè, $\underline{\boldsymbol{\sigma}}$ *è una curva integrale di* $\vec{\boldsymbol{X}}_H$ *se e solo se soddisfa alle equazioni differenziali:*

$$\dot q^\alpha = \frac{\partial H}{\partial p_\alpha} \tag{28}$$

$$\dot p_\alpha = -\frac{\partial H}{\partial q^\alpha} \tag{29}$$

Quando non viene interpretata come equazione differenziale, la (28) permette di definire la trasformazione inversa

$$\Phi_L^{-1}:\begin{pmatrix} t \\ q^\alpha \\ p_\alpha \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} t & = & t \\ q^\alpha & = & q^\alpha \\ \dot q^\alpha & = & \frac{\partial H}{\partial p_\alpha} \end{pmatrix} \tag{30}$$

della trasformazione di Legendre Φ_L. Inoltre, la condizione di regolarità (9) per una lagrangiana L si traduce nella seguente condizione di regolarità

$$\det\left(\frac{\partial^2 H}{\partial p_\alpha \partial p_\sigma}\right) \neq 0 \tag{31}$$

per la corrispondente hamiltoniana H.

La condizione di regolarità (31) ci assicura che componendo la curva integrale $\underline{\boldsymbol{\sigma}}$ con la proiezione $\pi_{\boldsymbol{Q}}:\boldsymbol{PQ}\to\boldsymbol{Q}$ si ottiene una sezione $\boldsymbol{\gamma}$ del fibrato delle configurazioni $\chi:\boldsymbol{Q}\to\mathbb{R}$ che è una soluzione delle equazioni di Eulero–Lagrange. Infatti, il prolungamento $j^1\boldsymbol{\gamma} : \mathbb{R} \to J^1\boldsymbol{Q}$ è una curva integrale del campo lagrangiano $\vec{\boldsymbol{X}}_L$ e si ha:

$$\underline{\boldsymbol{\sigma}} = (\Phi_L)_*(j^1\boldsymbol{\gamma}) = \Phi_L \circ j^1\boldsymbol{\gamma} \qquad \wedge \qquad j^1\boldsymbol{\gamma} = (\Phi_L)^*(\underline{\boldsymbol{\sigma}}) = \Phi_L^{-1} \circ \underline{\boldsymbol{\sigma}}$$

4 Forma di Poincaré–Cartan sul fibrato delle fasi

Definizione 4.1. *La* forma di Poincaré–Cartan $\underline{\boldsymbol{\Theta}}_H$ *sul fibrato delle fasi* $\boldsymbol{PQ}$ *è l'immagine della forma di Poincaré–Cartan* $\underline{\boldsymbol{\Theta}}_L$ *attraverso la trasformata di Legendre* Φ_L*. Ovvero,* $\underline{\boldsymbol{\Theta}}_H$ *è l'unica* 1*–forma su* $\boldsymbol{PQ}$ *che ha* $\underline{\boldsymbol{\Theta}}_L$ *come controimmagine attraverso la trasformata di Legendre* Φ_L*.*

Il diagramma

$$\begin{tikzcd} T^*(J^1\boldsymbol{Q}) \arrow[r, "T^*\Phi_L"] \arrow[d, "\pi_{J^1\boldsymbol{Q}}"] & T^*(\boldsymbol{PQ}) \arrow[d, "\pi_{\boldsymbol{PQ}}"'] \\ J^1\boldsymbol{Q} \arrow[r, "\Phi_L"'] \arrow[u, bend left, "\underline{\boldsymbol{\Theta}}_L"] & \boldsymbol{PQ} \arrow[u, bend right, "\underline{\boldsymbol{\Theta}}_H"'] \end{tikzcd}$$

è commutativo ([6]). Calcolando $\underline{\boldsymbol{\Theta}}_H$ si ha:

$$\underline{\boldsymbol{\Theta}}_H \;=\; (\Phi_L)_*\left(\underline{\boldsymbol{\Theta}}_L\right)$$

[6] Attenzione: $T^*\Phi_L$ esiste solo perché Φ_L è un diffeomorphismo!

$$
\begin{aligned}
&= (\Phi_L)_* \left(\frac{\partial L}{\partial \dot q^\alpha} (dq^\alpha - \dot q^\alpha dt) + L dt \right) \\
&= (\Phi_L)_* \left(\frac{\partial L}{\partial \dot q^\alpha} dq^\alpha - \left(\dot q^\alpha \frac{\partial L}{\partial \dot q^\alpha} - L \right) dt \right) \\
&= \left(\frac{\partial L}{\partial \dot q^\alpha} \circ \Phi_L^{-1} \right) dq^\alpha - \left(\left(\dot q^\alpha \frac{\partial L}{\partial \dot q^\alpha} - L \right) \circ \Phi_L^{-1} \right) dt
\end{aligned}
$$

e, quindi, otteniamo:

$$
\boxed{\underline{\boldsymbol{\Theta}}_H = p_\alpha \, dq^\alpha - H(t, q^\alpha, p_\alpha) dt} \tag{32}
$$

Posto $\underline{\boldsymbol{\Omega}}_H = d \, \underline{\boldsymbol{\Theta}}_H$, si ha

$$
\begin{aligned}
\underline{\boldsymbol{\Omega}}_H &= d \, (p_\alpha \, dq^\alpha - H(t, q^\alpha, p_\alpha) dt) \\
&= d \, p_\alpha \wedge d \, q^\alpha - d \, H \wedge d \, t \\
&= d \, p_\alpha \wedge d \, q^\alpha - \frac{\partial H}{\partial q^\alpha} d \, q^\alpha \wedge d \, t - \frac{\partial H}{\partial p_\alpha} d \, p_\alpha \wedge d \, t
\end{aligned}
$$

e, quindi:

$$
\boxed{\underline{\boldsymbol{\Omega}}_H = \left(d \, p_\alpha + \frac{\partial H}{\partial q^\alpha} \, d \, t \right) \wedge \left(d \, q^\alpha - \frac{\partial H}{\partial p_\alpha} \, d \, t \right)} \tag{33}
$$

La 2–forma $\underline{\boldsymbol{\Omega}}_H$ è, ovviamente, l'immagine attraverso Φ_L della 2–forma $\underline{\boldsymbol{\Omega}}_L = d \underline{\boldsymbol{\Theta}}_L$ e, come si verifica facilmente, dalla (25) e dalla (33) si deduce che $\vec{\boldsymbol{X}}_H \rfloor \underline{\boldsymbol{\Omega}}_H \equiv 0$.

Osservazione 4.1. La 2–forma $\underline{\boldsymbol{\Omega}}_H = d \, \underline{\boldsymbol{\Theta}}_H$ permette di caratterizzare le curve integrali del campo hamiltoniano $\vec{\boldsymbol{X}}_H$ in maniera analoga a quanto si può fare nel caso lagrangiano. Infatti, dalla proprietà che una sezione $\boldsymbol{\gamma} : \mathbb{R} \to \boldsymbol{Q}$ è una soluzione delle equazioni di Eulero–Lagrange se e solo se

$$\forall \vec{\boldsymbol{X}} \in \mathfrak{X}(J^1\boldsymbol{Q}) \qquad (j^1\boldsymbol{\gamma})^* \left(\vec{\boldsymbol{X}} \rfloor d\, \underline{\boldsymbol{\Theta}}_L \right) = 0 \tag{34}$$

si deduce che una sezione $\underline{\boldsymbol{\sigma}} : \mathbb{R} \to \boldsymbol{PQ}$ è una curva integrale del campo hamiltoniano (25) se e solo se

$$\forall \vec{\boldsymbol{\Xi}} \in \mathfrak{X}(\boldsymbol{PQ}) \qquad \underline{\boldsymbol{\sigma}}^* \left(\vec{\boldsymbol{\Xi}} \rfloor d\, \underline{\boldsymbol{\Theta}}_H \right) = 0 \tag{35}$$

Per la dimostrazione basta prendere $\vec{\boldsymbol{\Xi}} = (\Phi_L)_*(\vec{\boldsymbol{X}})$

Dato un campo di vettori

$$\vec{\boldsymbol{\Xi}} = \xi(t,q,p)\frac{\partial}{\partial t} + \xi^\beta(t,q,p)\frac{\partial}{\partial q^\beta} + \bar{\xi}_\gamma(t,q,p)\frac{\partial}{\partial p_\gamma}$$

sul fibrato delle fasi $\boldsymbol{PQ}$, possiamo dimostrare facilmente che $\vec{\boldsymbol{\Xi}} \rfloor \underline{\boldsymbol{\Omega}}_H = 0$ se e solo se il campo $\vec{\boldsymbol{\Xi}}$ è proporzionale al campo hamiltoniano $\vec{\boldsymbol{X}}_H$.

Dimostrazione. Basta infatti osservare che le 1-forme

$$\delta_H p_\alpha = d\,p_\alpha + \frac{\partial H}{\partial q^\alpha}\, d\,t \tag{36}$$

$$\delta_H q^\alpha = d\,q^\alpha - \frac{\partial H}{\partial p_\alpha}\, d\,t \tag{37}$$

sono linearmente indipendenti, e che

$$\vec{\boldsymbol{\Xi}} \rfloor \underline{\boldsymbol{\Omega}}_H = \vec{\boldsymbol{\Xi}} \rfloor (\delta_H p_\alpha \wedge \delta_H q^\alpha)$$

$$
\begin{aligned}
&= \left(\vec{\boldsymbol{\Xi}} \rfloor \delta_{_H} p_\alpha\right) \delta_{_H} q^\alpha - \left(\vec{\boldsymbol{\Xi}} \rfloor \delta_{_H} q^\alpha\right) \delta_{_H} p_\alpha \\
&= \left(\vec{\boldsymbol{\Xi}} \rfloor \left(d\, p_\alpha + \frac{\partial H}{\partial q^\alpha}\, d\, t\right)\right) \delta_{_H} q^\alpha - \left(\vec{\boldsymbol{\Xi}} \rfloor \left(d\, q^\alpha - \frac{\partial H}{\partial p_\alpha}\, d\, t\right)\right) \delta_{_H} p_\alpha \\
&= \left(\bar{\xi}_\alpha + \frac{\partial H}{\partial q^\alpha}\xi\right) \delta_{_H} q^\alpha - \left(\xi^\alpha - \frac{\partial H}{\partial p_\alpha}\xi\right) \delta_{_H} p_\alpha \qquad (38)
\end{aligned}
$$

La richiesta che la (38) si annulli, si traduce nelle seguenti identità

$$\xi^\alpha = \xi \frac{\partial H}{\partial p_\alpha} \qquad (39)$$

$$\bar{\xi}_\alpha = -\xi \frac{\partial H}{\partial q^\alpha} \qquad (40)$$

e, quindi, si ha:

$$\vec{\boldsymbol{\Xi}} = \xi \left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial H}{\partial p_\alpha}\frac{\partial}{\partial q^\alpha} - \frac{\partial H}{\partial q^\alpha}\frac{\partial}{\partial p_\beta}\right) = \xi \vec{\boldsymbol{X}}_{_H} \qquad (41)$$

Per dimostrare la proposizione analoga per un sistema lagrangiano si può procedere nel seguente modo. Dato un campo vettoriale $\vec{\boldsymbol{X}} \in \mathfrak{X}(J^1\boldsymbol{Q})$ e posto $\vec{\boldsymbol{\Xi}} = (\Phi_L)_*(\vec{\boldsymbol{X}})$, si ha:

$$(\Phi_L)_*(\vec{\boldsymbol{X}} \rfloor \underline{\boldsymbol{\Omega}}_{_L}) = (\Phi_L)_*(\vec{\boldsymbol{X}}) \rfloor (\Phi_L)_*(\underline{\boldsymbol{\Omega}}_{_L}) = \vec{\boldsymbol{\Xi}} \rfloor \underline{\boldsymbol{\Omega}}_{_H} \qquad (42)$$

Quindi

$$\vec{\boldsymbol{X}} \rfloor \underline{\boldsymbol{\Omega}}_{_L} = 0 \Leftrightarrow (\Phi_L)_*(\vec{\boldsymbol{X}}) = \xi \vec{\boldsymbol{X}}_{_H} \qquad (43)$$

da cui si deduce che:

$$\vec{\boldsymbol{X}} = (\Phi_L)^*(\xi \vec{\boldsymbol{X}}_{_H}) = (\Phi_L)^*(\xi)\,(\Phi_L)^*(\vec{\boldsymbol{X}}_{_H}) = (\xi \circ \Phi_L^{-1})\vec{\boldsymbol{X}}_{_L} \qquad (44)$$

$\square$

5 Integrali primi sul fibrato delle fasi

Condizione necessaria e sufficiente affinché una funzione $f : \boldsymbol{PQ} \longrightarrow \mathbb{R} : (t, p, q) \longmapsto f(t, q, p)$ sia un integrale primo per il campo hamiltoniano $\vec{\boldsymbol{X}}_{H}$ è che $\vec{\boldsymbol{X}}_{H}(f) = 0$

$$\vec{\boldsymbol{X}}_{H}(f) = \mathcal{L}_{\vec{\boldsymbol{X}}_{H}}(f) = \vec{\boldsymbol{X}}_{H} \rfloor d\, f = \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial H}{\partial p_\beta}\frac{\partial f}{\partial q^\beta} - \frac{\partial H}{\partial q^\alpha}\frac{\partial f}{\partial p_\alpha} = 0 \tag{45}$$

Dimostrazione. Calcolando la derivata formale della funzione f rispetto al tempo otteniamo:

$$\begin{aligned}
\frac{df}{dt} &= \frac{\partial f}{\partial t} + \dot{q}^\beta \frac{\partial f}{\partial q^\beta} + \dot{p}_\alpha \frac{\partial f}{\partial p_\alpha} \\
&= \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial H}{\partial p_\beta}\frac{\partial f}{\partial q^\beta} - \frac{\partial H}{\partial q^\alpha}\frac{\partial f}{\partial p_\alpha} + \left(\dot{q}^\beta - \frac{\partial H}{\partial p_\beta}\right)\frac{\partial f}{\partial q^\beta} + \left(\dot{p}_\alpha + \frac{\partial H}{\partial q^\alpha}\right)\frac{\partial f}{\partial p_\alpha} \\
&= \vec{\boldsymbol{X}}_{H}(f) + \left(\dot{q}^\beta - \frac{\partial H}{\partial p_\beta}\right)\frac{\partial f}{\partial q^\beta} + \left(\dot{p}_\alpha + \frac{\partial H}{\partial q^\alpha}\right)\frac{\partial f}{\partial p_\alpha}
\end{aligned} \tag{46}$$

Ricordiamo che ogni punto di $\boldsymbol{PQ}$ può essere preso come punto iniziale di una curva integrale di $\vec{\boldsymbol{X}}_{H}$. Calcolando la (46) su ogni curva soluzione $\underline{\boldsymbol{\sigma}}$ delle equazioni dei Hamilton (28) e (29) si deduce la validità della (45). $\square$

Definizione 5.1. *Le* parentesi di Poisson *di due funzioni* $F, G \in C^\infty(\boldsymbol{PQ}; \mathbb{R})$ *è la funzione* $\{F, G\} \in C^\infty(\boldsymbol{PQ}; \mathbb{R})$ *definita da*

$$\{F, G\} = \frac{\partial F}{\partial p_\beta}\frac{\partial G}{\partial q^\beta} - \frac{\partial F}{\partial q^\alpha}\frac{\partial G}{\partial p_\alpha} \tag{47}$$

Con questa definizione, possiamo scrivere la condizione (45) dicendo che la funzione f è un integrale primo per il campo hamiltoniano $\vec{\boldsymbol{X}}_H$ se e solo se

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \{H, f\} = 0 \tag{48}$$

Le parentesi di Poisson soddisfano alle seguenti proprietà:

1. Antisimmetria: $\{H, F\} = -\{F, H\}$
2. Bilinearità: $\{aF + bG, H\} = a\{F, H\} + b\{G, H\}$
3. Identità di Jacobi:

   $$\{F, \{G, H\}\} + \{G, \{H, F\}\} + \{H, \{F, G\}\} = 0$$

   che è equivalente a :

   $$\{F, \{G, H\}\} - \{G, \{F, H\}\} = \{\{F, G\}, H\}$$

4. Regola di Leibniz:

   $$\{F, GH\} = \{F, G\}H + \{F, H\}G$$

5. Regolarità:

$$\{F, G\} = 0 \quad \forall G \in C^\infty(\boldsymbol{PQ}; \mathbb{R}) \quad \Longrightarrow \quad F \text{ dipende solo dal tempo } t$$

Una proprietà importante delle parentesi di Poisson è la seguente.

Teorema 5.1. *Dati due integrali primi* F *e* G *del campo hamiltoniano* $\vec{\boldsymbol{X}}_{_H}$*, la loro parentesi di Poisson* $\{F, G\}$ *è anch'essa un integrale primo di* $\vec{\boldsymbol{X}}_{_H}$*.*

Dimostrazione. Sappiamo per ipotesi che

$$\frac{\partial F}{\partial t} + \{H, F\} = 0 \tag{49}$$

$$\frac{\partial G}{\partial t} + \{H, G\} = 0 \tag{50}$$

e dobbiamo dimostrare che

$$\frac{\partial}{\partial t}\{F, G\} + \{H, \{F, G\}\} = 0 \tag{51}$$

Per prima cosa calcoliamo $\frac{\partial}{\partial t}\{F, G\}$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t}\{F, G\} &= \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial F}{\partial p_\alpha}\frac{\partial G}{\partial q^\alpha} - \frac{\partial F}{\partial q^\alpha}\frac{\partial G}{\partial p_\alpha}\right) \\
&= \frac{\partial^2 F}{\partial t \partial p_\alpha}\frac{\partial G}{\partial q^\alpha} + \frac{\partial F}{\partial p_\alpha}\frac{\partial^2 G}{\partial t \partial q^\alpha} - \frac{\partial^2 F}{\partial t \partial q^\alpha}\frac{\partial G}{\partial p_\alpha} - \frac{\partial F}{\partial q^\alpha}\frac{\partial^2 G}{\partial t \partial p_\alpha} \\
&= \frac{\partial}{\partial p_\alpha}\left(\frac{\partial F}{\partial t}\right)\frac{\partial G}{\partial q^\alpha} - \frac{\partial}{\partial q^\alpha}\left(\frac{\partial F}{\partial t}\right)\frac{\partial G}{\partial p_\alpha} + \frac{\partial F}{\partial p_\alpha}\frac{\partial}{\partial q^\alpha}\left(\frac{\partial G}{\partial t}\right) - \frac{\partial F}{\partial q^\alpha}\frac{\partial}{\partial p_\alpha}\left(\frac{\partial G}{\partial t}\right)
\end{aligned}$$

$$= \left\{\frac{\partial F}{\partial t}, G\right\} + \left\{F, \frac{\partial G}{\partial t}\right\} \tag{52}$$

Dall'identità di Jacobi (**??**) si ha

$$\begin{aligned} \{H, \{F, G\}\} &= -\{F, \{G, H\}\} - \{G, \{H, F\}\} \\ &= \{\{H, F\}, G\} + \{F, \{H, G\}\} \end{aligned} \tag{53}$$

e, quindi, sommando la (52) e la (53) si dimostra la validità della tesi (51) $\square$

Osservazione 5.1. Le parentesi di Poisson definiscono sullo spazio vettoriale (di dimensione infinita) $C^\infty(\boldsymbol{PQ}; \mathbb{R})$, delle funzioni differenziabili sopra il fibrato delle fasi $\boldsymbol{PQ}$, una struttura di algebra di Lie detta *algebra di Poisson*. La bilinearità delle parentesi di Poisson ed il teorema 5.1 ci dicono che gli integrali primi del campo $\vec{\boldsymbol{X}}_H$ formano una sottoalgebra di Lie dell'algebra di Poisson.