Complementi di Metodi Matematici per la Fisica, esame 28/06/2023

Per passare all'orale sono necessari 17/32 punti.
Durata: 2h
È possibile usare un formulario personale di due facciate.

Esercizio 1. (10 punti)

Si consideri l'equazione di Laplace per la grandezza $u(x, y)$ in un dominio quadrato

$$u_{xx} + u_{yy} = 0, \quad 0 \leq x \leq \pi, \;\; 0 \leq y \leq \pi,$$

con le seguenti condizioni di bordo di Dirichlet:

$$\text{B.C.:} \begin{cases} u(x,0) = 0 & u(x,\pi) = 0, \\ u(0,y) = 0, & u(\pi, y) = y(y-\pi)^2. \end{cases}$$

Si calcoli $u(x, y)$ usando il metodo di decomposizione in soluzioni separabili. I coefficienti di Fourier devono essere espressi come integrali espliciti, ma NON è necessario calcolare gli integrali.

Esercizio 2. (8 punti)

Usando il metodo delle curve caratteristiche, si scriva una soluzione per l'equazione:

$$u_y + e^u \, u_x = 1.$$

con condizione iniziale

$$u(s, 0) = \sin s, \quad s \in \mathbb{R} \tag{0.1}$$

NOTA: La soluzione va lasciata in forma implicita (NON è richiesto di scrivere u come funzione esplicita di x e y).

Esercizio 3. (6 punti)

Si consideri l'equazione differenziale:

$$\frac{5y(x)}{32(x-2)^2(x-1)x}+\left(\frac{1}{2(x-1)}+\frac{5}{4x}+\frac{1}{4(x-2)}\right)y'(x)+y''(x)=0.$$

Usando il metodo di Papperitz-Riemann, si trovi la più generale soluzione tale che

$$\lim_{x\to 1} y(x)=0, \tag{0.2}$$

esprimendola in termini di funzioni speciali esplicite.

Nota: Per abbreviare i calcoli, si può usare l'informazione che l'equazione ha tre singolarità Fuchsiane. Gli indici nel punto singolare Fuchsiano $x=0$ sono $\left\{-\frac{1}{4},0\right\}$, mentre nel punto singolare Fuchsiano $x=2$ sono $\left\{\frac{5}{8},\frac{1}{8}\right\}$.

Suggerimento per lo svolgimento:

- Calcolare gli indici nel punto Fuchsiano rimanente, e scrivere la soluzione generica come simbolo P di Riemann.
- Usando le regole di trasformazione, portarsi a una forma canonica. Si scelga una forma canonica conveniente al fine di estrarre la soluzione di interesse con comportamento (0.2).

Esercizio 4. (8 punti)

Si consideri un cilindro conduttore di calore infinitamente lungo, descritto da

$$x^2+y^2\le R^2,\quad z\in\mathbb{R}.$$

Inizialmente, il cilindro è isolato, con una temperatura costante $T=T_0$ per tempi $t<0$.
Per tempi $t\ge 0$, la superficie esterna è posta in contatto con una sorgente a temperatura $T_{\text{ext}}=0$. Si assuma un coefficiente di diffusività termica generico α, e che la temperatura rimanga indipendente dalla coordinata longitudinale z.

- **(1 punto)** Si scriva l'equazione di evoluzione temporale per la temperatura u dentro al cilindro per tempi $t\ge 0$, specificando le condizioni di bordo e iniziali.
- **(1 punto)** Che valore assume la temperatura per $t\to\infty$?
- **(4 punti)** Si trovi una decomposizione per la temperatura della forma

  $$u(r,\theta,z,t)=\sum_{n=0}^{\infty} c_n\Phi_n(r,\theta,z)f_n(t),$$

  determinando esplicitamente la base di autofunzioni $f_n(t)$ e $\Phi_n(r,\theta,z)$.
  Si trascurino le variabili spaziali da cui non c'è dipendenza per t generico.
  Le autofunzioni devono essere tali da soddisfare le condizioni di bordo del problema.
- **(2 punti)** Imponendo la condizione iniziale, si determinino i coefficienti c_n. I coefficienti possono essere espressi in termini di integrali, ma NON è necessario valutare gli integrali.