Esempio di prova d'esame

Per passare all'orale sono necessari 17/32 punti.
Durata: 2h
È possibile usare qualsiasi formula dal file "UsefulEquations.pdf" (che verrà distribuito in classe durante l'esame), inoltre si può usare un formulario personale di due facciate.

Esercizio 1. (10 punti)

Una grandezza $u(x,t)$ è descritta dall'equazione delle onde sull'intervallo $x \in [0, 2\pi]$:

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0, \quad x \in [0, 2\pi],\ t \geq 0,$$

con condizioni al contorno

$$u_x(0,t) = u_x(2\pi, t) = 0.$$

Si consideri la condizione iniziale $u(x, t=0) = \sin^2(\frac{x}{2})$ e $\partial_t u(x,t)|_{t=0} = 0$. Si scriva la soluzione a tempi generici $t \geq 0$.

NOTA: i coefficienti di Fourier devono essere indicati esplicitamente come integrali, ma NON è necessario valutare gli integrali.

Esercizio 2. (10 punti)

Si consideri l'equazione differenziale seguente per la funzione $u(x,t)$:

$$u_t + (u + x)u_x = 0,$$

con la condizione iniziale $u(x, 0) = 4/(1 + x^2)$, $x \in \mathbb{R}$.

- (9 punti) Si trovi la soluzione usando il metodo delle caratteristiche. La soluzione può essere lasciata in forma implicita.
- (1 punto) Si mostri che la soluzione sviluppa una singolarità con l'evoluzione temporale. Si motivi la risposta con un'equazione che descrive l'istante di formazione della singolarità. (NON è necessario risolvere tale equazione e calcolare il tempo di formazione della singolarità esplicitamente).

Esercizio 3. (6 punti)

Si consideri l'equazione differenziale:

$$\frac{8y(x)}{9(x+1)(x-2)(x-3)^2} + \left(\frac{3}{2(x+1)} + \frac{1}{2(x-2)}\right) y'(x) + y''(x) = 0, \tag{0.1}$$

per una funzione $y(x)$. Usando il metodo di Papperitz-Riemann, si scriva una base di due soluzioni. Le soluzioni devono essere espresse esplicitamente attraverso funzioni speciali, e devono essere distinte da due comportamenti diversi intorno a **uno a scelta** tra i tre punti Fuchsiani dell'equazione.

NOTA: Si può usare l'informazione che l'equazione ha indici $(\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$ relativi al punto singolare Fuchsiano $x = 3$, e $(0, -\frac{1}{2})$ relativi al punto singolare Fuchsiano $x = -1$.

Esercizio 4. (6 punti)

Si consideri una lastra metallica bidimensionale con la forma di un settore circolare, descritto in coordinate polari da $0 \leq r \leq 2$, $0 \leq \theta \leq \frac{3}{5}\pi$.

La lastra ha una distribuzione di temperatura $T(r, \theta)$ **indipendente dal tempo**.*

Sui bordi della lastra la temperatura è mantenuta ai seguenti valori:

$$T(r = 2, \theta) = \sin(\frac{5}{3}\theta) + 2\sin(5\theta), \quad 0 \leq \theta \leq \frac{3}{5}\pi, \tag{0.2}$$

$$T(r, \theta = 0) = 0, \quad T(r, \theta = \frac{3}{5}\pi) = 0, \quad 0 \leq r \leq 2. \tag{0.3}$$

Si scriva la forma della distribuzione di temperatura nella lastra per r e θ generici. NOTA: Non c'è dipendenza temporale.

Suggerimento per lo svolgimento: Si consideri la suddivisione dell'equazione differenziale rilevante in coordinate polari. Decomponendo $T(r, \theta) = \sum_n c_n \Theta_n(\theta) R_n(r)$, si trovi la corretta base di autofunzioni sulla base delle condizioni di bordo sui lati rettilinei del dominio. Si fissino i coefficienti della decomposizione per soddisfare l'ultima condizione di bordo sul lato curvilineo.

*Si ignori la dispersione di calore nella direzione ortogonale alla lastra, e si assuma quindi che il sistema sia strettamente bidimensionale.