Le permutazioni pari formano un sottogruppo $\mathfrak{S}_k^+ = \mathrm{sgn}^{-1}(1)$ del gruppo $\mathfrak{S}_k$. Le permutazioni dispari formano un sottoinsieme $\mathfrak{S}_k^- = \mathrm{sgn}^{-1}(-1) \subset \mathfrak{S}_k$. Il sottoinsieme $\mathfrak{S}_1^-$ è vuoto; quando $k > 1$ si ha[6] $\left|\mathfrak{S}_k^+\right| = \left|\mathfrak{S}_k^-\right| = \frac{k!}{2}$.

Consideriamo ora due spazi vettoriali $\mathbf{E}$ ed $\mathbf{F}$ e lo spazio vettoriale $\mathbf{L}_k\,(\mathbf{E};\mathbf{F})$, con $k > 1$. Diciamo che una funzione multilineare $\psi \in \mathbf{L}_k\,(\mathbf{E};\mathbf{F})$ è *simmetrica* se e solo se

$$\sigma \in \mathfrak{S}_k \;\wedge\; (\vec{\boldsymbol{x}}_1,\ldots,\vec{\boldsymbol{x}}_k) \in \mathbf{E}^k \Longrightarrow \psi(\vec{\boldsymbol{x}}_{\sigma(1)},\ldots,\vec{\boldsymbol{x}}_{\sigma(k)}) = \psi(\vec{\boldsymbol{x}}_1,\ldots,\vec{\boldsymbol{x}}_k).$$

Diciamo che una funzione multilineare $\psi \in \mathbf{L}_k\,(\mathbf{E};\mathbf{F})$ è *antisimmetrica* se e solo se

$$\sigma \in \mathfrak{S}_k \;\wedge\; (\vec{\boldsymbol{x}}_1,\ldots,\vec{\boldsymbol{x}}_k) \in \mathbf{E}^k \Longrightarrow \psi(\vec{\boldsymbol{x}}_{\sigma(1)},\ldots,\vec{\boldsymbol{x}}_{\sigma(k)}) = \mathrm{sgn}(\sigma)\,\psi(\vec{\boldsymbol{x}}_1,\ldots,\vec{\boldsymbol{x}}_k).$$

L'insieme delle applicazioni multilineari simmetriche $\psi \in \mathbf{L}_k(\mathbf{E};\mathbf{F})$ è un sottospazio vettoriale $\mathbf{S}_k(\mathbf{E};\mathbf{F}) \subset \mathbf{L}_k(\mathbf{E};\mathbf{F})$. L'insieme delle applicazioni multilineari antisimmetriche $\psi \in \mathbf{L}_k(\mathbf{E};\mathbf{F})$ è un sottospazio vettoriale $\mathbf{A}_k(\mathbf{E};\mathbf{F}) \subset \mathbf{L}_k(\mathbf{E};\mathbf{F})$. Molte volte è utile estendere la definizione di applicazioni simmetriche o antisimmetriche ai casi in cui $k = 1$ e $k = 0$:

$$\mathbf{S}_1(\mathbf{E};\mathbf{F}) = \mathbf{L}_1(\mathbf{E};\mathbf{F}) = \mathbf{L}(\mathbf{E};\mathbf{F}) \quad , \quad \mathbf{A}_1(\mathbf{E};\mathbf{F}) = \mathbf{L}_1(\mathbf{E};\mathbf{F}) = \mathbf{L}(\mathbf{E};\mathbf{F})$$

$$\mathbf{S}_0(\mathbf{E};\mathbf{F}) = \mathbf{L}_0(\mathbf{E};\mathbf{F}) = \mathbf{F} \quad , \quad \mathbf{A}_0(\mathbf{E};\mathbf{F}) = \mathbf{L}_0(\mathbf{E};\mathbf{F}) = \mathbf{F}$$

[6] La funzione $|S|$ indica il numero cardinale di un insieme S. Per un insieme finito è il numero di elementi di S.

Data un'applicazione multilineare $\psi \in \mathbf{L}_k(\mathbf{E};\mathbf{F})$, con $k>1$, definiamo la parte simmetrica $S(\psi)$

$$S(\psi)(\vec{\boldsymbol{x}}_1,\dots,\vec{\boldsymbol{x}}_k) = \tfrac{1}{k!}\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_k}\psi(\vec{\boldsymbol{x}}_{\sigma(1)},\dots,\vec{\boldsymbol{x}}_{\sigma(k)}) \qquad \forall(\vec{\boldsymbol{x}}_1,\dots,\vec{\boldsymbol{x}}_k)\in\mathbf{E}^k$$

e la parte antisimmetrica $A(\psi)$

$$A(\psi)(\vec{\boldsymbol{x}}_1,\dots,\vec{\boldsymbol{x}}_k) = \tfrac{1}{k!}\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_k}\operatorname{sgn}(\sigma)\psi(\vec{\boldsymbol{x}}_{\sigma(1)},\dots,\vec{\boldsymbol{x}}_{\sigma(k)}) \qquad \forall(\vec{\boldsymbol{x}}_1,\dots,\vec{\boldsymbol{x}}_k)\in\mathbf{E}^k$$

di ψ. Quando $\psi\in\mathbf{S}_k(\mathbf{E};\mathbf{F})$ si ha $S(\psi)=\psi$ e $A(\psi)=0$. Quando $\psi\in\mathbf{A}_k(\mathbf{E};\mathbf{F})$ si ha $A(\psi)=\psi$ e $S(\psi)=0$.

Si dimostra facilmente che $S(\psi)\in\mathbf{S}_k(\mathbf{E};\mathbf{F})$, che $A(\psi)\in\mathbf{A}_k(\mathbf{E};\mathbf{F})$ e che valgolo le identità

$$S\circ S=S \quad , \quad S\circ A=0 \quad , \quad A\circ S=0 \quad , \quad A\circ A=A.$$

La funzione lineare $S:\mathbf{L}_k(\mathbf{E};\mathbf{F})\longrightarrow\mathbf{S}_k(\mathbf{E};\mathbf{F})$ viene detta *simmetrizzazione* mentre la funzione lineare $A:\mathbf{L}_k(\mathbf{E};\mathbf{F})\longrightarrow\mathbf{A}_k(\mathbf{E};\mathbf{F})$ viene detta *antisimmetrizzazione*.

Infine, si ha[7]

$$\mathbf{S}_k(\mathbf{E};\mathbf{F})\cap\mathbf{A}_k(\mathbf{E};\mathbf{F})=\{0\}$$

Calcolando le dimensioni degli spazi vettoriali $\mathbf{L}_k(\mathbf{E};\mathbf{F})$, $\mathbf{A}_k(\mathbf{E};\mathbf{F})$ e $\mathbf{S}_k(\mathbf{E};\mathbf{F})$ otteniamo

$$\dim(\mathbf{L}_k(\mathbf{E};\mathbf{F}))=mn^k \quad , \quad \dim(\mathbf{A}_k(\mathbf{E};\mathbf{F}))=m\binom{n}{k} \quad , \quad \dim(\mathbf{S}_k(\mathbf{E};\mathbf{F}))=m\binom{n+k-1}{k}$$

[7] Ovviamente vale solo per $k>1$.

dove si è posto $n = \dim(\mathbf{E})$ ed $m = \dim(\mathbf{F})$.

Si dimostra facilmente che, quando $k = 2$, si ha

$$\dim(\mathbf{A}_2(\mathbf{E};\mathbf{F})) + \dim(\mathbf{S}_2(\mathbf{E};\mathbf{F})) = \dim(\mathbf{L}_2(\mathbf{E};\mathbf{F}))$$

ed inoltre

$$\mathbf{A}_2(\mathbf{E};\mathbf{F}) \oplus \mathbf{S}_2(\mathbf{E};\mathbf{F}) = \mathbf{L}_2(\mathbf{E};\mathbf{F})$$

Se $k > 2$, si ottiene

$$\dim(\mathbf{A}_k(\mathbf{E};\mathbf{F})) + \dim(\mathbf{S}_k(\mathbf{E};\mathbf{F})) < \dim(\mathbf{L}_k(\mathbf{E};\mathbf{F}))$$

Quindi,

$$\mathbf{A}_k(\mathbf{E};\mathbf{F}) \oplus \mathbf{S}_k(\mathbf{E};\mathbf{F}) \subset \mathbf{L}_k(\mathbf{E};\mathbf{F})$$

ed esistono applicazioni multilineari non nulle $\psi \in \mathbf{L}_k(\mathbf{E};\mathbf{F})$ tali che $A(\psi) = 0$ e $S(\psi) = 0$.

Esempio 1.1. [Scomposizione dei tensori tre volte covarianti]

Ad esempio se $\psi \in \mathbf{L}_3(\mathbf{E};\mathbb{K}) = T^0_3(\mathbf{E})$ e $\dim(\mathbf{E}) > 1$ possiamo considerare le componenti ψ_{irs} e scomporle come segue

$$\psi_{irs} = \psi_{(ir)s} + \psi_{[ir]s} = \psi_{(irs)} + \left(\psi_{(ir)s} - \psi_{(irs)}\right) + \left(\psi_{[ir]s} - \psi_{[irs]}\right) + \psi_{[irs]}$$

dove si è posto

$$\psi_{(ir)s} \;=\; \tfrac{1}{2}(\psi_{irs} + \psi_{ris})$$

$$\begin{aligned}
\psi_{[ir]s} &= \tfrac{1}{2}(\psi_{irs} - \psi_{ris}) \\
\psi_{(irs)} &= \tfrac{1}{6}(\psi_{irs} + \psi_{ris} + \psi_{rsi} + \psi_{sri} + \psi_{sir} + \psi_{isr}) = \tfrac{1}{3}(\psi_{(ir)s} + \psi_{(rs)i} + \psi_{(si)r}) \\
\psi_{[irs]} &= \tfrac{1}{6}(\psi_{irs} - \psi_{ris} + \psi_{rsi} - \psi_{sri} + \psi_{sir} - \psi_{isr}) = \tfrac{1}{3}(\psi_{[ir]s} + \psi_{[rs]i} + \psi_{[si]r})
\end{aligned}$$

I due tensori $\underline{\boldsymbol{\sigma}}, \underline{\boldsymbol{\alpha}} \in T_3^0(\mathbf{E})$ di componenti $\sigma_{irs} = \psi_{(ir)s} - \psi_{(irs)}$ e $\alpha_{irs} = \psi_{[ir]s} - \psi_{[irs]}$ soddisfano alle identità: $S(\underline{\boldsymbol{\sigma}}) = 0$, $A(\underline{\boldsymbol{\sigma}}) = 0$, $S(\underline{\boldsymbol{\alpha}}) = 0$ e $A(\underline{\boldsymbol{\alpha}}) = 0$. Se definiamo

$$\beta_{ijk} = \alpha_{k(ij)} \ \wedge \ \gamma_{ijk} = \beta_{k[ij]} \qquad \Longrightarrow \qquad \gamma_{ijk} = -\tfrac{3}{4}\alpha_{ijk}$$

In generale si ha $\underline{\boldsymbol{\sigma}} \neq 0$ e $\underline{\boldsymbol{\alpha}} \neq 0$. Quando $\dim(\mathbf{E}) = n > 1$, lo spazio dei tensori di tipo $\underline{\boldsymbol{\sigma}}$ e lo spazio dei tensori di tipo $\underline{\boldsymbol{\alpha}}$ hanno entrambi dimensione $n\,(n-1)\,(n+1)\,/3$.

1.10 Tensori simmetrici o antisimmetrici su uno spazio vettoriale

Quando consideriamo gli spazi di tensori covarianti $T_k^0(\mathbf{E})$, o di tensori controvarianti $T_0^k(\mathbf{E})$, di ordine k, possiamo definire gli spazi di tensori simmetrici covarianti $S_k^0(\mathbf{E})$, o controvarianti $S_0^k(\mathbf{E})$, e gli spazi di tensori antisimmetrici covarianti $A_k^0(\mathbf{E})$, o controvarianti $A_0^k(\mathbf{E})$, di ordine k. Nel seguito vedremo le proprietà e le operazioni per i tensori covarianti, ma, con le opportune modifiche, varranno proprietà ed operazioni analoghe per i tensori controvarianti.

Dato un tensore covariante $\underline{\boldsymbol{\alpha}} \in T_k^0(\mathbf{E})$, con $k > 1$, consideriamo la parte simmetrica $S(\underline{\boldsymbol{\alpha}}) \in S_k^0(\mathbf{E})$ e la parte antisimmetrica $A(\underline{\boldsymbol{\alpha}}) \in A_k^0(\mathbf{E})$. Per ogni base $\mathfrak{b} = (\vec{\boldsymbol{e}}_1, \ldots, \vec{\boldsymbol{e}}_n) \in \mathcal{B}(\mathbf{E})$ le componenti del tensore $\underline{\boldsymbol{\alpha}}$ sono definite da

$$\alpha_{j_1\dots j_k} = \underline{\boldsymbol{\alpha}}(\vec{\boldsymbol{e}}_{j_1}, \dots, \vec{\boldsymbol{e}}_{j_k})$$

ed il tensore $\underline{\boldsymbol{\alpha}}$ può essere riscritto come

$$\underline{\boldsymbol{\alpha}} = \alpha_{c_1\dots c_k}\, \underline{\boldsymbol{\varepsilon}}^{c_1} \otimes \cdots \otimes \underline{\boldsymbol{\varepsilon}}^{c_k}$$

Quando il tensore $\underline{\boldsymbol{\alpha}}$ è simmetrico le componenti sono simmetriche nel senso che

$$\alpha_{j_{\sigma(1)}\cdots j_{\sigma(k)}} = \alpha_{j_1\dots j_k} \qquad \forall \sigma \in \mathfrak{S}_k$$

Se, invece, il tensore $\underline{\boldsymbol{\alpha}}$ è antisimmetrico, le componenti sono antisimmetriche nel senso che

$$\alpha_{j_{\sigma(1)}\cdots j_{\sigma(k)}} = \mathrm{sgn}(\sigma)\, \alpha_{j_1\dots j_k} \qquad \forall \sigma \in \mathfrak{S}_k$$

Definiamo la simmetrizzazione

$$\alpha_{(c_1\dots c_k)} = \tfrac{1}{k!} \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_k} \alpha_{c_{\sigma(1)}\dots c_{\sigma(k)}}$$

e l'antisimmetrizzazione

$$\alpha_{[c_1\dots c_k]} = \tfrac{1}{k!} \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_k} \mathrm{sgn}(\sigma)\, \alpha_{c_{\sigma(1)}\dots c_{\sigma(k)}}$$

delle componenti di $\underline{\boldsymbol{\alpha}}$.

Per qualunque tensore $\underline{\boldsymbol{\alpha}}$, le componenti della parte simmetrica e della parte antisimmetrica sono

$$S(\underline{\boldsymbol{\alpha}})_{c_1\dots c_k} = \alpha_{(c_1\dots c_k)} \qquad , \qquad A(\underline{\boldsymbol{\alpha}})_{c_1\dots c_k} = \alpha_{[c_1\dots c_k]}$$

Dalle proprietà delle operazioni di simmetrizzazione e di antisimmetrizzazione possiamo dedurre che valgono le seguenti identità

$$\alpha_{((c_1 \ldots c_k))} = \alpha_{(c_1 \ldots c_k)} \quad , \quad \alpha_{[(c_1 \ldots c_k)]} = 0 \quad , \quad \alpha_{([c_1 \ldots c_k])} = 0 \quad , \quad \alpha_{[[c_1 \ldots c_k]]} = \alpha_{[c_1 \ldots c_k]}$$

con $k > 1$. Inoltre, se $1 \leq a < b \leq k$, si ha

$$\alpha_{(c_1 \ldots (c_a \ldots c_b) \ldots c_k)} = \alpha_{(c_1 \ldots c_k)} \quad , \quad \alpha_{[c_1 \ldots (c_a \ldots c_b) \ldots c_k]} = 0 \quad , \quad \alpha_{(c_1 \ldots [c_a \ldots c_b] \ldots c_k)} = 0 \quad , \quad \alpha_{[c_1 \ldots [c_a \ldots c_b] \ldots c_k]} = \alpha_{[c_1 \ldots c_k]}$$

con le ovvie modifiche quando $a = 1$ e/o $b = k$.

1.11 Prodotto esterno e prodotto simmetrico

La dimensione dello spazio $S^0_k(\mathbf{E})$ dei tensori covarianti simmetrici di ordine k su di uno spazio vettoriale $\mathbf{E}$ di dimensione $n > 0$ è $\dim(S^0_k(\mathbf{E})) = \binom{n+k-1}{k}$. Possiamo osservare che se $n = 1$ tutti gli spazi $S^0_k(\mathbf{E})$ hanno dimensione 1, mentre se $n > 1$ la dimensione cresce al crescere di k.

Per gli spazi dei tensori covarianti antisimmetrici $A^0_k(\mathbf{E})$, sappiamo che se $k > n$ si ha $A^0_k(\mathbf{E}) = \{0\}$ e, quindi, $\dim(A^0_k(\mathbf{E})) = 0$. Quando $0 \leq k \leq n$ si ha $\dim(A^0_k(\mathbf{E})) = \binom{n}{k}$.

Se consideriamo i prodotti tensoriali $S^0_k(\mathbf{E}) \otimes S^0_s(\mathbf{E})$, con $k > 0$ e $s > 0$, scopriamo che sono sottospazi vettoriali di $T^0_{k+s}(\mathbf{E})$, ma non sono tensori simmetrici. Analogamente, i prodotti tensoriali $A^0_k(\mathbf{E}) \otimes A^0_s(\mathbf{E})$ sono sottospazi vettoriali di $T^0_{k+s}(\mathbf{E})$, ma non sono tensori antisimmetrici.

Per ottenere un'operazione di prodotto che mandi coppie di tensori simmetrici in tensori simmetrici, possiamo comporre il prodotto tensoriale con con l'operazione di simmetrizzazione

$$\begin{array}{rcl} S^0_k(\mathbf{E}) \times S^0_s(\mathbf{E}) & \longrightarrow & S^0_{k+s}(\mathbf{E}) \\ (\underline{\boldsymbol{\alpha}}_k, \underline{\boldsymbol{\beta}}_s) & \longmapsto & S(\underline{\boldsymbol{\alpha}}_k \otimes \underline{\boldsymbol{\beta}}_s), \end{array}$$

L'operazione così definita è bilineare e associativa.

Analogamente, per ottenere un'operazione di prodotto che mandi coppie di tensori antisimmetrici in tensori antisimmetrici, possiamo comporre il prodotto tensoriale con l'operazione di antisimmetrizzazione

$$\begin{array}{rcl} A^0_k(\mathbf{E}) \times A^0_s(\mathbf{E}) & \longrightarrow & A^0_{k+s}(\mathbf{E}) \\ (\underline{\boldsymbol{\alpha}}_k, \underline{\boldsymbol{\beta}}_s) & \longmapsto & A(\underline{\boldsymbol{\alpha}}_k \otimes \underline{\boldsymbol{\beta}}_s), \end{array}$$

L'operazione così definita è bilineare e associativa.

In alcuni testi le due operazioni vengono modificate moltiplicando il risultato per un coefficiente $\chi(k,s)$ definendo il *prodotto simmetrico* $\odot : S^0_k(\mathbf{E}) \times S^0_s(\mathbf{E}) \longrightarrow S^0_{k+s}(\mathbf{E})$ attraverso la formula

$$\underline{\boldsymbol{\alpha}}_k \odot \underline{\boldsymbol{\beta}}_s = \chi(k,s)\, S(\underline{\boldsymbol{\alpha}}_k \otimes \underline{\boldsymbol{\beta}}_s),$$

e definendo il *prodotto esterno* $\wedge : A^0_k(\mathbf{E}) \times A^0_s(\mathbf{E}) \longrightarrow A^0_{k+s}(\mathbf{E})$ attraverso la formula

$$\underline{\boldsymbol{\alpha}}_k \wedge \underline{\boldsymbol{\beta}}_s = \chi(k,s)\, A(\underline{\boldsymbol{\alpha}}_k \otimes \underline{\boldsymbol{\beta}}_s),$$

I due prodotti sono sicuramente bilineari e l'unica condizione imposta sui coefficienti $\chi(k,s)$ è quella di fare in modo che il prodotto sia anche associativo, cioè[8]:

$$\chi(k+s,r)\chi(k,s) = \chi(k,s+r)\chi(s,r) \qquad \forall k,r,s \in \mathbb{N}$$

Le due scelte più comuni sono

$$\chi(k,s) \equiv 1 \qquad \text{oppure} \qquad \chi(k,s) \equiv \tfrac{(k+s)!}{k!s!}$$

per ogni $k, s \in \mathbb{N}$, e non è detto che venga scelta la stessa formula per il prodotto simmetrico $\odot$ e per il prodotto esterno $\wedge$. In questo lavoro verrà sempre scelta la formula

$$\chi(k,s) \equiv \tfrac{(k+s)!}{k!s!}$$

sia per il prodotto simmetrico $\odot$ che per il prodotto esterno $\wedge$.

Oltre ad essere bilineare ed associativo, il prodotto simmetrico è anche commutativo $\underline{\boldsymbol{\alpha}}_k \odot \underline{\boldsymbol{\beta}}_s = \underline{\boldsymbol{\beta}}_s \odot \underline{\boldsymbol{\alpha}}_k$. Il prodotto esterno, oltre ad essere bilineare ed associativo, ha la seguente proprietà: $\underline{\boldsymbol{\alpha}}_k \wedge \underline{\boldsymbol{\beta}}_s = (-1)^{ks}\, \underline{\boldsymbol{\beta}}_s \wedge \underline{\boldsymbol{\alpha}}_k$.

Rappresentando i tensori attraverso le componenti rispetto una base $\mathfrak{b} = (\vec{\boldsymbol{e}}_1, \ldots, \vec{\boldsymbol{e}}_n) \in \mathcal{B}(\mathbf{E})$ otteniamo

$$\underline{\boldsymbol{\alpha}} = \alpha_{c_1 \ldots c_k}\, \underline{\boldsymbol{\varepsilon}}^{c_1} \otimes \cdots \otimes \underline{\boldsymbol{\varepsilon}}^{c_k} = \tfrac{1}{k!}\, \alpha_{c_1 \ldots c_k}\, \underline{\boldsymbol{\varepsilon}}^{c_1} \odot \cdots \odot \underline{\boldsymbol{\varepsilon}}^{c_k}$$

[8] L'insieme $\mathbb{N}$ contiene il numero 0.

per ogni $\underline{\boldsymbol{\alpha}} \in S^0_k(\mathbf{E})$. Analogamente, si ha

$$\underline{\boldsymbol{\beta}} = \beta_{c_1\dots c_k}\, \underline{\boldsymbol{\varepsilon}}^{c_1} \otimes \dots \otimes \underline{\boldsymbol{\varepsilon}}^{c_k} = \tfrac{1}{k!}\, \beta_{c_1\dots c_k}\, \underline{\boldsymbol{\varepsilon}}^{c_1} \wedge \dots \wedge \underline{\boldsymbol{\varepsilon}}^{c_k}$$

per ogni $\underline{\boldsymbol{\beta}} \in A^0_k(\mathbf{E})$.

Dalle definizioni di $\odot$ e di $\wedge$ si deduce che

$$\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}^{c_1} \odot \dots \odot \underline{\boldsymbol{\varepsilon}}^{c_k} = k!\, \underline{\boldsymbol{\varepsilon}}^{(c_1} \otimes \dots \otimes \underline{\boldsymbol{\varepsilon}}^{c_k)} \qquad \Longrightarrow \qquad \underline{\boldsymbol{\varepsilon}}^{(c_1} \odot \dots \odot \underline{\boldsymbol{\varepsilon}}^{c_k)} = \underline{\boldsymbol{\varepsilon}}^{c_1} \odot \dots \odot \underline{\boldsymbol{\varepsilon}}^{c_k}$$

e che analogamente si ha

$$\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}^{c_1} \wedge \dots \wedge \underline{\boldsymbol{\varepsilon}}^{c_k} = k!\, \underline{\boldsymbol{\varepsilon}}^{[c_1} \otimes \dots \otimes \underline{\boldsymbol{\varepsilon}}^{c_k]} \qquad \Longrightarrow \qquad \underline{\boldsymbol{\varepsilon}}^{[c_1} \wedge \dots \wedge \underline{\boldsymbol{\varepsilon}}^{c_k]} = \underline{\boldsymbol{\varepsilon}}^{c_1} \wedge \dots \wedge \underline{\boldsymbol{\varepsilon}}^{c_k}$$

Osserviamo che

- l'insieme di tensori $\{\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}^{c_1} \otimes \dots \otimes \underline{\boldsymbol{\varepsilon}}^{c_k} : c_1, \dots, c_k \in [1, \dots, n]\}$ è una base non ordinata per $T^0_k(\mathbf{E})$,
- l'insieme di tensori simmetrici $\{\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}^{c_1} \odot \dots \odot \underline{\boldsymbol{\varepsilon}}^{c_k} : c_1 \le c_2 \le \dots \le c_k \in [1, \dots, n]\}$ è una base non ordinata $S^0_k(\mathbf{E})$,
- l'insieme di tensori antisimmetrici $\{\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}^{c_1} \wedge \dots \wedge \underline{\boldsymbol{\varepsilon}}^{c_k} : c_1 < c_2 < \dots < c_k \in [1, \dots, n]\}$ è una base non ordinata $A^0_k(\mathbf{E})$.

Dati due tensori simmetrici $\underline{\boldsymbol{\alpha}}_p \in S^0_p(\mathbf{E})$ e $\underline{\boldsymbol{\beta}}_q \in S^0_q(\mathbf{E})$ si ha

$$\begin{aligned} \underline{\boldsymbol{\alpha}}_p &= \tfrac{1}{p!}\, \alpha_{i_1\dots i_p}\, \underline{\boldsymbol{\varepsilon}}^{i_1} \odot \dots \odot \underline{\boldsymbol{\varepsilon}}^{i_p} \\ \underline{\boldsymbol{\beta}}_q &= \tfrac{1}{q!}\, \beta_{j_1\dots j_q}\, \underline{\boldsymbol{\varepsilon}}^{j_1} \odot \dots \odot \underline{\boldsymbol{\varepsilon}}^{j_q} \end{aligned}$$

da cui si deduce che

$$\underline{\boldsymbol{\alpha}}_p \odot \underline{\boldsymbol{\beta}}_q = \left(\tfrac{1}{p!}\,\alpha_{i_1\dots i_p}\,\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}^{i_1}\odot\cdots\odot\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}^{i_p}\right)\odot\left(\tfrac{1}{q!}\,\beta_{j_1\dots j_q}\,\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}^{j_1}\odot\cdots\odot\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}^{j_q}\right)$$

$$\begin{aligned}
\underline{\boldsymbol{\alpha}}_p \odot \underline{\boldsymbol{\beta}}_q &= \left(\tfrac{1}{p!}\,\alpha_{i_1\dots i_p}\,\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}^{i_1}\odot\cdots\odot\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}^{i_p}\right)\odot\left(\tfrac{1}{q!}\,\beta_{j_1\dots j_q}\,\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}^{j_1}\odot\cdots\odot\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}^{j_q}\right)\\
&= \tfrac{1}{p!}\,\tfrac{1}{q!}\,\alpha_{i_1\dots i_p}\,\beta_{j_1\dots j_q}\,\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}^{i_1}\odot\cdots\odot\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}^{i_p}\odot\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}^{j_1}\odot\cdots\odot\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}^{j_q}\\
&= \tfrac{1}{p!\,q!}\,\alpha_{(i_1\dots i_p}\,\beta_{j_1\dots j_q)}\,\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}^{i_1}\odot\cdots\odot\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}^{i_p}\odot\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}^{j_1}\odot\cdots\odot\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}^{j_q}\\
&= \tfrac{1}{(p+q)!}\left(\tfrac{(p+q)!}{p!\,q!}\,\alpha_{(i_1\dots i_p}\,\beta_{j_1\dots j_q)}\right)\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}^{i_1}\odot\cdots\odot\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}^{i_p}\odot\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}^{j_1}\odot\cdots\odot\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}^{j_q}
\end{aligned}$$

e, quindi, che

$$(\underline{\boldsymbol{\alpha}}_p \odot \underline{\boldsymbol{\beta}}_q)_{i_1\dots i_p\,j_1\dots j_q} = \tfrac{(p+q)!}{p!\,q!}\,\alpha_{(i_1\dots i_p}\,\beta_{j_1\dots j_q)}$$

Se invece di considerare due tensori simmetrici consideriamo due tensori antisimmetrici $\underline{\boldsymbol{\alpha}}_p \in A^0_p(\mathbf{E})$ e $\underline{\boldsymbol{\beta}}_q \in A^0_q(\mathbf{E})$ si ha

$$\begin{aligned}
\underline{\boldsymbol{\alpha}}_p &= \tfrac{1}{p!}\,\alpha_{i_1\dots i_p}\,\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}^{i_1}\wedge\cdots\wedge\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}^{i_p}\\
\underline{\boldsymbol{\beta}}_q &= \tfrac{1}{q!}\,\beta_{j_1\dots j_q}\,\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}^{j_1}\wedge\cdots\wedge\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}^{j_q}
\end{aligned}$$

da cui si deduce che

$$\underline{\boldsymbol{\alpha}}_p \wedge \underline{\boldsymbol{\beta}}_q = \left(\tfrac{1}{p!}\,\alpha_{i_1\dots i_p}\,\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}^{i_1}\wedge\cdots\wedge\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}^{i_p}\right)\wedge\left(\tfrac{1}{q!}\,\beta_{j_1\dots j_q}\,\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}^{j_1}\wedge\cdots\wedge\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}^{j_q}\right)$$

$$\begin{aligned}
\underline{\boldsymbol{\alpha}}_p \wedge \underline{\boldsymbol{\beta}}_q &= \left(\tfrac{1}{p!}\,\alpha_{i_1\dots i_p}\,\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}^{i_1}\wedge\cdots\wedge\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}^{i_p}\right)\wedge\left(\tfrac{1}{q!}\,\beta_{j_1\dots j_q}\,\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}^{j_1}\wedge\cdots\wedge\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}^{j_q}\right)\\
&= \tfrac{1}{p!}\,\tfrac{1}{q!}\,\alpha_{i_1\dots i_p}\,\beta_{j_1\dots j_q}\,\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}^{i_1}\wedge\cdots\wedge\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}^{i_p}\wedge\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}^{j_1}\wedge\cdots\wedge\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}^{j_q}\\
&= \tfrac{1}{p!\,q!}\,\alpha_{[i_1\dots i_p}\,\beta_{j_1\dots j_q]}\,\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}^{i_1}\wedge\cdots\wedge\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}^{i_p}\wedge\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}^{j_1}\wedge\cdots\wedge\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}^{j_q}\\
&= \tfrac{1}{(p+q)!}\left(\tfrac{(p+q)!}{p!\,q!}\,\alpha_{[i_1\dots i_p}\,\beta_{j_1\dots j_q]}\right)\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}^{i_1}\wedge\cdots\wedge\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}^{i_p}\wedge\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}^{j_1}\wedge\cdots\wedge\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}^{j_q}
\end{aligned}$$

e, quindi, che

$$(\underline{\boldsymbol{\alpha}}_p \wedge \underline{\boldsymbol{\beta}}_q)_{i_1\dots i_p\,j_1\dots j_q} = \tfrac{(p+q)!}{p!\,q!}\,\alpha_{[i_1\dots i_p}\,\beta_{j_1\dots j_q]}$$

1.12 Prodotto interno di un vettore con un tensore covariante

Dati un tensore k volte covariante $\underline{\boldsymbol{\alpha}} \in T^0_k(\mathbf{E})$ ed un vettore $\vec{\boldsymbol{x}} \in \mathbf{E}$ definiamo il prodotto interno di $\vec{\boldsymbol{x}}$ e $\underline{\boldsymbol{\alpha}}$ come il tensore $k-1$ volte covariante $\iota_{\vec{\boldsymbol{x}}}(\underline{\boldsymbol{\alpha}}) \in T^0_{k-1}(\mathbf{E})$ definito da

$$\iota_{\vec{\boldsymbol{x}}}(\underline{\boldsymbol{\alpha}})(\vec{\boldsymbol{y}}_2,\dots,\vec{\boldsymbol{y}}_k) = \underline{\boldsymbol{\alpha}}(\vec{\boldsymbol{x}},\vec{\boldsymbol{y}}_2,\dots,\vec{\boldsymbol{y}}_k)$$

Nel caso in cui $k=1$, si ha che $\iota_{\vec{\boldsymbol{x}}}(\underline{\boldsymbol{\alpha}}) = \underline{\boldsymbol{\alpha}}(\vec{\boldsymbol{x}}) \in \mathbb{K}$. Se, invece, $k=0$ poniamo per definizione $\iota_{\vec{\boldsymbol{x}}}(\underline{\boldsymbol{\alpha}}) = 0$. Quando applichiamo il prodotto interno a tensori simmetrici o antisimmetrici il risultato mantiene lo stesso tipo di simmetria: restringendo $\iota_{\vec{\boldsymbol{x}}}(\cdot)$ ai tensori simmetrici otteniamo una funzione lineare che viene indicata ancora con lo stesso nome

$$\iota_{\vec{\boldsymbol{x}}}(\cdot) : S^0_k(\mathbf{E}) \longrightarrow S^0_{k-1}(\mathbf{E}).$$

Analogamente, per i tensori antisimmetrici

$$\iota_{\vec{\boldsymbol{x}}}(\cdot) : A_k^0(\mathbf{E}) \longrightarrow A_{k-1}^0(\mathbf{E}).$$

Non esiste una relazione ben definita (tipo Leibnitz) fra prodotto interno e prodotto tensoriale

$$\iota_{\vec{\boldsymbol{x}}}(\underline{\boldsymbol{\alpha}}_p \otimes \underline{\boldsymbol{\beta}}_q) = \begin{cases} \iota_{\vec{\boldsymbol{x}}}(\underline{\boldsymbol{\alpha}}_p) \otimes \underline{\boldsymbol{\beta}}_q & \text{se} \quad p > 0 \\ \underline{\boldsymbol{\alpha}}_p \otimes \iota_{\vec{\boldsymbol{x}}}(\underline{\boldsymbol{\beta}}_q) & \text{se} \quad p = 0 \end{cases}$$

Se applichiamo il prodotto interno $\iota_{\vec{\boldsymbol{x}}}(\cdot)$ ad un prodotto simmetrico di due tensori simmetrici $\underline{\boldsymbol{\alpha}}_p \in S_p^0(\mathbf{E})$ e $\underline{\boldsymbol{\beta}}_q \in S_q^0(\mathbf{E})$ si ha

$$\iota_{\vec{\boldsymbol{x}}}(\underline{\boldsymbol{\alpha}}_p \odot \underline{\boldsymbol{\beta}}_q) = \iota_{\vec{\boldsymbol{x}}}(\underline{\boldsymbol{\alpha}}_p) \odot \underline{\boldsymbol{\beta}}_q + \underline{\boldsymbol{\alpha}}_p \odot \iota_{\vec{\boldsymbol{x}}}(\underline{\boldsymbol{\beta}}_q)$$

Se, invece, applichiamo il prodotto interno $\iota_{\vec{\boldsymbol{x}}}(\cdot)$ ad un prodotto esterno di due tensori antisimmetrici $\underline{\boldsymbol{\alpha}}_p \in A_p^0(\mathbf{E})$ e $\underline{\boldsymbol{\beta}}_q \in A_q^0(\mathbf{E})$ otteniamo

$$\iota_{\vec{\boldsymbol{x}}}(\underline{\boldsymbol{\alpha}}_p \wedge \underline{\boldsymbol{\beta}}_q) = \iota_{\vec{\boldsymbol{x}}}(\underline{\boldsymbol{\alpha}}_p) \wedge \underline{\boldsymbol{\beta}}_q + (-1)^p \underline{\boldsymbol{\alpha}}_p \wedge \iota_{\vec{\boldsymbol{x}}}(\underline{\boldsymbol{\beta}}_q)$$

FINE LEZIONE 3 MMdFC (2023-03-03 ore 14:00 – 16:00)

Riferimenti bibliografici

[1] G. C. Shephard: *Spazi vettoriali di dimensioni finite*; Collana Poliedro, Edizioni Cremonese, Roma, 1969.

[2] S. Mac Lane, G. Birkhoff: *Algèbre, Tome 1, Structures fondamentales*; Gauthier–Villars, Paris, 1970.

[3] S. Mac Lane, G. Birkhoff: *Algèbre, Tome 2, Les grands théorèmes*; Gauthier–Villars, Paris, 1970.

[4] W. Gröbner: *Gruppi, anelli e algebre di Lie*; Collana Poliedro, Edizioni Cremonese, Roma, 1975.