Appunti di calcolo differenziale sugli spazi affini

Marco FERRARIS

Dipartimento di Matematica “Giuseppe Peano”
Università degli Studi di Torino

2023

Sommario

In questi appunti verrà introdotto il calcolo differenziale sugli spazi affini di dimensione finita cercando di definire i concetti in modo tale che sia possibile estenderli senza troppi problemi alle varietà differenziabili. Il campo degli scalari $\mathbb{K}$ degli spazi vettoriali sarà $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ o, a volte, $\mathbb{K} = \mathbb{C}$:

1 Spazi vettoriali topologici di dimensione finita

Ogni spazio vettoriale $\mathbf{E}$ di dimensione finita n sul campo $\mathbb{K}$ ($\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$), dotato di una topologia separata (cioè di Hausdorff o T_2) compatibile con la struttura di spazio vettoriale, è isomorfo allo spazio vettoriale topologico $\mathbb{K}^n$ con la topologia prodotto. Questo è vero perché $\mathbb{K}$ è un campo normato completo (si veda [1], capitolo 1, teorema 2).

Scelta una base $\mathfrak{b} = (\vec{\boldsymbol{e}}_1, \dots, \vec{\boldsymbol{e}}_n) \in \mathcal{B}(\mathbf{E})$, la funzione lineare biiettiva $\beta : \mathbf{E} \to \mathbb{K}^n$ associata alla base $\mathfrak{b}$ ha come funzione inversa $\beta^{-1} : \mathbb{K}^n \longrightarrow \mathbf{E}$ la funzione definita da

$$\beta^{-1} : (x^1, \dots, x^n) \longmapsto x^i \vec{\boldsymbol{e}}_i$$

che, oltre ad essere un isomorfismo di spazi vettoriali, è anche un omeomorfismo fra di spazi vettoriali topologici $\mathbb{K}^n$ ed $\mathbf{E}$.

Ogni norma $\| \cdot \| : \mathbb{K}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ induce una norma $\| \cdot \|_{\mathfrak{b}} : \mathbf{E} \longrightarrow \mathbb{R}$, che dipende dalla base $\mathfrak{b}$, e viceversa. Siccome tutte le norme su $\mathbb{K}^n$ sono equivalenti possiamo dire che anche tutte le norme su $\mathbf{E}$ sono equivalenti. Quando ne abbiamo bisogno possiamo pensare allo spazio vettoriale topologico $\mathbf{E}$ come ad uno spazio normato completo, cioè ad uno spazio di Banach di dimensione finita (altre volte converrà pensarlo come uno spazio di Fréchet o come uno spazio di Hilbert).

Una proprietà delle funzioni lineari fra spazi vettoriali di dimensione finita è che sono tutte funzioni continue continue (si veda [1], capitolo 1, corollario 2). Data una funzione lineare $\psi \in \mathbf{L}(\mathbf{E}; \mathbf{F})$ si dimostra che è una funzione lineare limitata fra spazi di Banach, e quindi continua. È sufficiente definire $\|\psi\| = \sup_{\|\vec{\boldsymbol{x}}\|=1} \|\psi(\vec{\boldsymbol{x}})\| < \infty$, perché valga la relazione $\|\psi(\vec{\boldsymbol{x}})\| \leq \|\psi\| \|\vec{\boldsymbol{x}}\|$.

Anche le funzioni multilineari fra spazi vettoriali di dimensione finita sono tutte continue. Data una funzione multilineare $\psi \in \mathbf{L}(\mathbf{E}_1, \dots, \mathbf{E}_k; \mathbf{F})$ si dimostra che è una funzione multilineare limitata fra spazi di Banach, e quindi continua. È sufficiente definire $\|\psi\| = \sup_{\{\|\vec{\boldsymbol{x}}_1\|=1,\ldots,\|\vec{\boldsymbol{x}}_k\|=1\}} \|\psi(\vec{\boldsymbol{x}}_1, \ldots, \vec{\boldsymbol{x}}_k)\| < \infty$, perché valga la relazione $\|\psi(\vec{\boldsymbol{x}}_1, \ldots, \vec{\boldsymbol{x}}_k)\| \leq \|\psi\| \|\vec{\boldsymbol{x}}_1\| \cdots \|\vec{\boldsymbol{x}}_k\|$.

Consideriamo tutte le funzioni $f : A \longrightarrow \mathbf{F}$ definite su un sottoinsieme aperto $A \subseteq \mathbf{E}$ ed a valori in $\mathbf{F}$. Dire che la funzione f è continua in un punto $x \in A$ equivale a dire

$$\lim_{\|\vec{\boldsymbol{y}}\| \to 0} \|f(x + \vec{\boldsymbol{y}}) - f(x)\| = 0$$

Diciamo che una funzione $f : A \longrightarrow \mathbf{F}$ è una funzione continua, oppure funzione di classe $\mathcal{C}^0$, da A in $\mathbf{F}$ se è continua in ogni punto $x \in A$. L'insieme delle funzioni continue da A in $\mathbf{F}$ verrà indicato con $\mathcal{C}^0(A; \mathbf{F})$. L'insieme $\mathcal{C}^0(A; \mathbf{F})$ ha una struttura naturale di spazio vettoriale di dimensione infinita su campo $\mathbb{K}$. Quando consideriamo solo le funzioni f a valori in un sottoinsieme aperto $B \subset \mathbf{F}$, l'insieme $\mathcal{C}^0(A; B)$ perde la struttura di spazio vettoriale.

1.1 Funzioni derivabili (secondo Fréchet)

Diciamo che una funzione $f : A \longrightarrow \mathbf{F}$ è derivabile (secondo Fréchet) in un punto $x \in A$ se esiste una funzione lineare $\psi \in \mathbf{L}(\mathbf{E}, \mathbf{F})$ tale che

$$\lim_{\|\vec{\boldsymbol{y}}\| \to 0} \frac{\|f(x + \vec{\boldsymbol{y}}) - f(x) - \psi(\vec{\boldsymbol{y}})\|}{\|\vec{\boldsymbol{y}}\|} = 0$$

La funzione ψ è la derivata della funzione f nel punto x e verrà indicata con $D(f)(x)$. Si dimostra facilmente che se la funzione f è derivabile in un punto x allora è anche continua nel punto x.

Diciamo che una funzione $f : A \longrightarrow \mathbf{F}$ è una funzione derivabile da A in $\mathbf{F}$ se è derivabile in ogni punto $x \in A$. La derivata di f è la funzione $D(f) : A \longrightarrow \mathbf{L}(\mathbf{E}, \mathbf{F})$ definita da $D(f) : x \longmapsto D(f)(x)$.

- Se $f : A \to \mathbf{F}$ è una funzione costante, allora è derivabile in ogni punto $x \in A$ e si ha $D(f)(x) = 0$.

- Se $f : A \to \mathbf{F}$ è la restrizione ad A di una funzione $\alpha \in \mathbf{L}(\mathbf{E}; \mathbf{F})$ allora è derivabile in ogni punto $x \in A$ e la derivata è la funzione costante $D(f) : x \mapsto \alpha$.

- Se $f : A \to \mathbf{F}$ è la restrizione ad A di una funzione affine (polinomio di primo grado), cioè:

$$f : x \longmapsto f(y) + \alpha(x - y)$$

  dove $y \in A$ è un punto fissato (ma non troppo) e $\alpha \in \mathbf{L}(\mathbf{E}; \mathbf{F})$, allora f è derivabile in ogni punto $x \in \mathbf{E}$ e la derivata è la funzione costante $D(f) : x \mapsto \alpha$.

Fissato un punto $x \in A$ consideriamo un intorno aperto B di $f(x)$ ed una funzione $g : B \longrightarrow \mathbf{G}$ a valori in un terzo spazio vettoriale $\mathbf{G}$. Se la funzione f è derivabile nel punto x e la funzione g è derivabile nel punto $f(x)$ allora la funzione $g \circ f$ è derivabile nel punto x e si ha

$$D(g \circ f)(x) = D(g)(f(x)) \circ D(f)(x)$$

Diciamo che una funzione $f : A \longrightarrow \mathbf{F}$ è una funzione derivabile con continuità, o funzione di classe $\mathcal{C}^1$, se la derivata $D(f) : A \longrightarrow \mathbf{L}(\mathbf{E}, \mathbf{F})$ è una funzione continua. L'insieme delle funzioni da

A in $\mathbf{F}$ che sono derivabili con continuità verrà indicato con $\mathcal{C}^1(A;\mathbf{F})$. L'insieme $\mathcal{C}^1(A;\mathbf{F})$ ha una struttura naturale di spazio vettoriale di dimensione infinita su campo $\mathbb{K}$. Quando consideriamo solo le funzioni a valori in un sottoinsieme aperto $B \subset \mathbf{F}$ l'insieme $\mathcal{C}^1(A;B)$ perde la struttura di spazio vettoriale. La composizione di due (o più) funzioni di classe $\mathcal{C}^1$ è ancora di classe $\mathcal{C}^1$.

Il rango di una funzione $f : A \longrightarrow \mathbf{F}$ derivabile in un punto $x \in A$ è per definizione in rango della derivata $D(f)(x)$. Scriveremo $\mathrm{rg}_x(f) := \mathrm{rg}(D(f)(x))$, ricordiamo che $\mathrm{rg}_x(f) \leq \min(\dim(\mathbf{E}), \dim(\mathbf{F}))$. Il rango delle funzioni di classe $\mathcal{C}^1$ è una funzione semicontinua inferiormente: se $\mathrm{rg}_x(f) = k$ allora esiste un intorno aperto U di $x \in A$ tale che $\mathrm{rg}_y(f) \geq k$ per ogni punto $y \in U \setminus \{x\}$. L'insieme dei punti $x \in A$ in cui la funzione f ha il rango massimo è un insieme aperto.

1.2 Derivate direzionali.

La funzione f è derivabile direzionalmente in un punto $x \in A$ lungo un vettore $\vec{\boldsymbol{y}} \in \mathbf{E}$ se esiste il limite.

$$df(x;\vec{\boldsymbol{y}}) = \lim_{t\to 0} \frac{f(x+t\vec{\boldsymbol{y}}) - f(x)}{t}$$

Diciamo che la funzione f è derivabile direzionalmente nel punto $x \in A$ se esiste la derivata direzionale $df(x;\vec{\boldsymbol{y}})$ lungo ogni vettore $\vec{\boldsymbol{y}} \in \mathbf{E}$. L'unica proprietà dimostrabile della funzione $df(x;\cdot)$:

$\vec{\boldsymbol{y}} \mapsto df(x;\vec{\boldsymbol{y}})$ è che: $df(x;\lambda\,\vec{\boldsymbol{y}}) = \lambda\,df(x;\vec{\boldsymbol{y}})$ per ogni $\lambda \in \mathbb{K}$[1]. Ci sono funzioni f per cui $df(x;\cdot)$ non è lineare per qualche punto $x \in A$. Se la funzione di due variabili $(x,\vec{\boldsymbol{y}}) \mapsto df(x;\vec{\boldsymbol{y}})$ è continua si può dimostrare che $df(x;\cdot)$ è una funzione lineare (si veda [4]).

Quando la funzione f è derivabile in un punto $x \in A$ allora esiste la derivata direzionale $df(x;\vec{\boldsymbol{y}})$ in x lungo qualunque vettore $\vec{\boldsymbol{y}} \in \mathbf{E}$. Infatti si ha

$$\lim_{t\to 0} \frac{f(x+t\vec{\boldsymbol{y}}) - f(x)}{t} = D(f)(x)(\vec{\boldsymbol{y}})$$

e, ovviamente, la derivata direzionale $df(x;\cdot) = D(f)(x)$ è lineare.

1.3 Derivate seconde.

Se $f \in \mathcal{C}^1(A;\mathbf{F})$ e la funzione $D(f) : A \longrightarrow \mathbf{L}(\mathbf{E};\mathbf{F})$ è derivabile in un punto $x \in A$, si ha $D(D(f))(x) \in \mathbf{L}(\mathbf{E},\mathbf{L}(\mathbf{E},\mathbf{F}))$. Utilizzando l'isomorfismo di spazi vettoriali $\mathbf{L}(\mathbf{E},\mathbf{L}(\mathbf{E},\mathbf{F})) \leftrightarrow \mathbf{L}(\mathbf{E},\mathbf{E};\mathbf{F}) \equiv \mathbf{L}_2(\mathbf{E};\mathbf{F})$ possiamo definire la derivata seconda $D^2(f)(x)$ di f nel punto $x \in A$ ponendo $D^2(f)(x) \equiv D(D(f))(x) \in \mathbf{L}_2(\mathbf{E};\mathbf{F})$. Si dimostra che la funzione bilineare $D^2(f)(x)$ è simmetrica, cioè: $D^2(f)(x) \in \mathbf{S}_2(\mathbf{E};\mathbf{F})$.

[1] Quando il campo $\mathbb{K}$ è la retta reale $\mathbb{R}$, possiamo definire

$$df(x;\vec{\boldsymbol{y}}) = \lim_{t\to 0^+} \frac{f(x+t\vec{\boldsymbol{y}}) - f(x)}{t}$$

In questo caso possiamo dimostrare solo che, in generale, $df(x;\lambda\,\vec{\boldsymbol{y}}) = \lambda\,df(x;\vec{\boldsymbol{y}})$ per ogni $\lambda \in \mathbb{R}_0^+$.

Quando $D(f)$ è derivabile in ogni punto x di A definiamo la derivata seconda come la funzione $D^2(f) : A \longrightarrow \mathbf{L}_2(\mathbf{E};\mathbf{F})$ definita da $D^2(f) : x \longmapsto D^2(f)(x)$. Se $D^2(f)$ è una funzione continua, diremo che f è una funzione di classe $\mathcal{C}^2$ e scriveremo $f \in \mathcal{C}^2(A;\mathbf{F})$. Le derivate seconde delle funzioni composte si calcolano secondo la seguente formula

$$D^2(g \circ f)(x) = D^2(g)(f(x)) \circ (D(f)(x) \times D(f)(x)) + D(g)(f(x)) \circ D^2(f)(x)$$

da cui si può dedurre che la composizione di due (o più) funzioni di classe $\mathcal{C}^2$ è ancora una funzione di classe $\mathcal{C}^2$.

1.4 Derivate di ordine superiore.

Per definire le derivate di ordine superiore a 2 possiamo procedere nel seguente modo. Data una funzione $f \in \mathcal{C}^{k-1}(A;\mathbf{F})$, se la funzione $D^{k-1}(f) : A \longrightarrow \mathbf{L}_{k-1}(\mathbf{E};\mathbf{F})$ è derivabile in un punto $x \in A$, la derivata $D(D^{k-1}(f))(x) \in \mathbf{L}(\mathbf{E};\mathbf{L}_{k-1}(\mathbf{E};\mathbf{F})) \equiv \mathbf{L}_k(\mathbf{E};\mathbf{F})$ verrà detta derivata di ordine k di f nel punto x e verrà indicata con $D^k(f)(x)$. Si dimostra che anche la funzione $D^k(f)(x)$ è simmetrica, cioè: $D^k(f)(x) \in \mathbf{S}_k(\mathbf{E};\mathbf{F})$.

Quando $D^k(f)$ è derivabile in ogni punto x di A, la derivata di ordine k della funzione f è la funzione $D^k(f) : A \longrightarrow \mathbf{L}_k(\mathbf{E};\mathbf{F})$ definita da $D^k(f) : x \longmapsto D^k(f)(x)$. Se $D^k(f)$ è una funzione continua, diremo che f è una funzione di classe $\mathcal{C}^k$ e scriveremo $f \in \mathcal{C}^k(A;\mathbf{F})$.

Anche in questo caso, la composizione di due funzioni di classe $\mathcal{C}^k$ è ancora una funzione di classe $\mathcal{C}^k$. Con questo tipo di notazione, la formula per calcolare la derivata di ordine $k+1$ delle funzioni composte è molto più complicata da scrivere e, per il momento, non la scriveremo.

1.5 Sviluppo in serie di Taylor

Per le funzioni $f \in \mathcal{C}^k(A;\mathbf{F})$ si dimostra che, quando il segmento che unisce x e $x+\vec{\boldsymbol{v}}$ è contenuto in A, vale la seguente identità:

$$f(x+\vec{\boldsymbol{v}}) = f(x) + \frac{1}{1!}D(f)(x)(\vec{\boldsymbol{v}}) + \frac{1}{2!}D^2(f)(x)(\vec{\boldsymbol{v}})^2 + \dots \frac{1}{k!}D^k(f)(x)(\vec{\boldsymbol{v}})^k + R_k(f,x,\vec{\boldsymbol{v}})$$

dove $(\vec{\boldsymbol{v}})^p = (\vec{\boldsymbol{v}},\dots,\vec{\boldsymbol{v}})$ (p volte). Il resto di ordine k

$$R_k(f,x,\vec{\boldsymbol{v}}) = \int_0^1 \frac{(1-\zeta)^{k-1}}{(k-1)!}\left[D^k(f)(x+\zeta\vec{\boldsymbol{v}}) - D^k(f)(x)\right] d\zeta$$

tende a 0 quando $\vec{\boldsymbol{v}}$ tende a $\vec{0}$.

1.6 Funzioni derivabili infinite volte e funzioni analitiche.

Le funzioni di classe $\mathcal{C}^\infty$ sono le funzioni che ammettono derivate di ordine k per ogni $k \in \mathbb{N}$. L'insieme delle funzioni $f : A \longrightarrow \mathbf{F}$ di classe $\mathcal{C}^\infty$ verrà indicato con $\mathcal{C}^\infty(A;\mathbf{F})$. La composizione di due (o più) funzioni di classe $\mathcal{C}^\infty$ è ancora una funzione di classe $\mathcal{C}^\infty$.

Tra le funzioni di classe $f \in \mathcal{C}^\infty(A;\mathbf{F})$ ci sono quelle che chiameremo funzioni *analitiche*. Le funzioni analitiche in un punto $x \in A$ sono le funzioni per cui esiste un numero reale positivo $r \in \mathbb{R}^+$ tale che nella bolla aperta $B(x;r)$ la funzione coincida con la somma della serie di Taylor, cioè:

$$f(x+\vec{\boldsymbol{v}}) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} D^k(f)(x)(\vec{\boldsymbol{v}})^k \qquad\qquad \forall \vec{\boldsymbol{v}} \in B(\vec{0};r) \subset \mathbf{E}$$

dove, come al solito, si è posto: $D^0(f) \equiv f$, $(\vec{\boldsymbol{v}})^0 \equiv 1$, $D^1(f) \equiv D(f)$.

Le funzioni analitiche da A in $\mathbf{F}$ sono le funzioni $f : A \to \mathbf{F}$ che sono analitiche in ogni punto di A. L'insieme delle funzioni analitiche da A in $\mathbf{F}$ verrà indicato con $\mathcal{C}^\omega(A;\mathbf{F})$.

1.7 Derivate parziali.

Consideriamo tre spazi vettoriali $\mathbf{E}$, $\mathbf{F}$ e $\mathbf{G}$, due aperti $A \subseteq \mathbf{E}$ e $B \subseteq \mathbf{F}$. Se una funzione $f : A \times B \to \mathbf{G}$ è differenziabile in un punto $(x,y) \in A \times B$ le restrizioni

$$D_1(f)(x,y) = D(f)(x,y)|_{\mathbf{E}\times\{0\}} \qquad , \qquad D_2(f)(x,y) = D(f)(x,y)|_{\{0\}\times\mathbf{F}}$$

definiscono le derivate parziali $D_1(f)(x,y) \in \mathbf{L}(\mathbf{E};\mathbf{G})$ e $D_2(f)(x,y) \in \mathbf{L}(\mathbf{F};\mathbf{G})$ di f nel punto $(x,y) \in A \times B$.

Quando la funzione f è derivabile in ogni punto $(x,y) \in A \times B$, possiamo definire le due funzioni che chiameremo derivate parziali di f:

$$D_1(f) : A \times B \longrightarrow \mathbf{L}(\mathbf{E};\mathbf{G})$$

$$D_2(f) : A \times B \longrightarrow \mathbf{L}(\mathbf{F}; \mathbf{G})$$

Quando $f \in \mathcal{C}^1(A \times B; \mathbf{G})$ si ha $D(f)(x, y)(\vec{\boldsymbol{u}}, \vec{\boldsymbol{v}}) = D_1(f)(x, y)(\vec{\boldsymbol{u}}) + D_2(f)(x, y)(\vec{\boldsymbol{v}})$.

1.8 Esempi

- La funzione $f : A \to \mathbf{F}$ è una funzione polinomiale di grado (al più) k se la derivata $D^{k+1}(f)$ si annulla.
- Consideriamo tre spazi vettoriali $\mathbf{E}$, $\mathbf{F}$ e $\mathbf{G}$, due aperti $A \subseteq \mathbf{E}$ e $B \subseteq \mathbf{F}$ ed una funzione bilineare $\beta \in \mathbf{L}(\mathbf{E}, \mathbf{F}; \mathbf{G})$. Se $f : A \times B \to \mathbf{G}$ è la restrizione ad $A \times B$ della funzione bilineare β allora $D^3(f) = 0$.

2 Teoremi fondamentali di Analisi Matematica

Ci sono alcuni teoremi che si dimostrano a partire dal teorema del punto fisso e che per noi saranno fondamentali. A noi interesserà soprattutto imparare ad utilizzarli per risolvere problemi che incontreremo molto spesso. Per le dimostrazioni si rimanda a testi di Analisi Matematica come [2] e/o [3]. I primi teoremi che ci interessano maggiormente sono il teorema della funzione inversa, il teorema della funzione implicita ed il teorema del rango. Nel seguito $A \in \mathbf{E}$ e $B \in \mathbf{F}$ saranno due insiemi aperti di due spazi vettoriali $\mathbf{E}$ e $\mathbf{F}$ di dimensione finita sul campo $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.

2.1 Teorema della funzione inversa

Il teorema della funzione inversa riguarda la possibilità di risolvere (sistemi di) equazioni del tipo $f(x) = y$ ottenendo una soluzione unica del tipo $x = g(y)$.

Il teorema della funzione inversa dice che se abbiamo una funzione $f \in \mathcal{C}^k(A; B)$, con $k > 0$ o $k = \infty$ o $k = \omega$, tale che in un punto $p \in A$ la derivata prima $D(f)(p) \in \mathbf{L}(\mathbf{E}; \mathbf{F})$ sia una funzione lineare invertibile, allora esistono un intorno aperto U del punto $p \in A$ ed un intorno aperto V del punto $f(p) \in B$ tali che la restrizione $f|_U$ della funzione f all'aperto U sia una funzione biiettiva $f|_U : U \longrightarrow V$ con funzione inversa $(f|_U)^{-1} : V \longrightarrow U$ di classe $\mathcal{C}^k$. Evidentemente i due spazi vettoriali $\mathbf{E}$ e $\mathbf{F}$ devono avere la stessa dimensione, la derivata prima $D(f)|_U(x) = D(f|_U)(x)$ è invertibile in ogni punto di $x \in U$ e $D(f^{-1})(f(x)) = (D(f)(x))^{-1}$ ogni punto di $x \in U$. Le derivate di ordine superiore di f^{-1} si calcolano implicitamente derivando l'identità $D(f^{-1})(f(x)) \circ D(f)(x) = \mathrm{id}$.

Osserviamo che anche quando in ogni punto $x \in A$ esiste $(D(f)(x))^{-1}$, la funzione f è *localmente invertibile*, ma non è necessariamente globalmente invertibile. Un esempio classico di funzione di questo tipo è l'esponenziale dei numeri complessi che, vista come funzione $\exp : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, è definita da $\exp : (x, y) \mapsto (e^x \cos(y), e^x \sin(y))$. Il codominio della funzione exp è $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ ed punto $(a, b) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ ha un'infinità numerabile di controimmagini (logaritmi) perché per ogni $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ si ha: $\exp(x, y + 2\pi) = \exp(x, y)$.

Una funzione $f \in \mathcal{C}^k(A; B)$ che sia invertibile e con inversa di classe $\mathcal{C}^k$ viene detta *diffeomor-*

fismo di classe $\mathcal{C}^k$. D'ora in avanti diremo che f è un diffeomorfismo sottintendendo che f è un diffeomorfismo di classe $\mathcal{C}^\infty$. Se f non è di classe $\mathcal{C}^\infty$ specificheremo esplicitamente la classe di differenziabilità.

Quando $\mathbf{F} = \mathbb{R}^n$ diremo che un diffeomorfismo $f \in \mathcal{C}^\infty(A; B)$ è un *sistema di coordinate (curvilinee)* sull'aperto A.

FINE LEZIONE 6 MMdFC (2023-03-10 ore 14:00 – 16:00)

Riferimenti bibliografici

[1] N. Bourbaki, *Espaces vectoriels topologiques, Chapitres 1 et 2*; Hermann, Paris, 1966.

[2] J. Dieudonné: *Éléments d'analyse 1 / Fondements de l'analyse moderne*; Gauthier–Villars, Paris, 1969.

[3] J. E. Marsden, T. Ratiu, R. Abraham: *Manifolds, tensor analysis and applications, Third Edition*; Springer–Verlag, 2001.

[4] M. Ferraris: *A New Approach to Differential Calculus in Locally Convex Spaces*; Atti Accad. Sci. Torino, Cl. Sci. Fis. Mat. Nat., 113, 1979, 77-83.

[5] M. Ferraris: *Appunti di algebra lineare, multilineare e tensori*; 2023.