Una curva $\gamma : I \longrightarrow A$, definita su un intervallo aperto $I \subseteq \mathbb{R}$, viene detta *curva integrale* di un campo di vettori $\vec{X} \in \mathfrak{X}(A)$ se, e solo se, per ogni $t \in I$ si ha

$$\frac{d\gamma(t)}{dt} = \vec{X}(\gamma(t)) \qquad \text{dove si è posto} \qquad \frac{d\gamma(t)}{dt} = T_t(\gamma)(1) \in T_{\gamma(t)}(A)$$

Le curve integrali sono funzioni di classe $\mathcal{C}^\infty$. Se il campo di vettori $\vec{X}$ è di classe $\mathcal{C}^k$ con $k \geq 1$ le curve integrali $\gamma : I \longrightarrow A$ sono di classe $\mathcal{C}^{k+1}$; se il campo di vettori $\vec{X}$ è analitico le curve integrali γ sono funzioni analitiche.

La curva γ è una curva parametrizzata e per ogni $t \in I$ il vettore tangente alla curva nel punto $\gamma(t)$ coincide col valore del campo di vettori $\vec{X}$ nel punto $\gamma(t)$. Diciamo che una curva $\gamma : I \longrightarrow A$ è *basata in un punto* $p \in A$ se $0 \in I$ e $\gamma(0) = p$.

Il teorema, di Cauchy, di esistenza ed unicità delle soluzioni di un sistema di equazioni differenziali ordinarie del prim'ordine[2] ci assicura che se $\vec{X} \in \mathfrak{X}(A)$ allora per ogni punto $p \in A$ esiste una curva integrale $\gamma : I \longrightarrow A$ basata nel punto p che è unica nel senso che se $\gamma_1 : I_1 \longrightarrow A$ e $\gamma_2 : I_2 \longrightarrow A$ sono due curve integrali basate nel punto p allora $\gamma_1(t) = \gamma_2(t)$ per ogni $t \in I_1 \cap I_2 \neq \emptyset$. In generale, per mettere in evidenza che una curva (integrale) $\gamma : I \longrightarrow A$, dove I è un intorno aperto (piccolo o grande) dello $0 \in \mathbb{R}$, è basata nel punto $p \in A$ scriveremo $\gamma_p : I \longrightarrow A$.

Le curve integrali ottenute dal teorema di Cauchy si possono estendere sfruttando l'unicità e la proprietà fondamentale che ci assicura che $\gamma_1(\tau) = \gamma(t+\tau)$ e $\gamma_2(\tau) = \gamma_{\gamma(t)}(\tau)$ sono due curve integrali

[2]Per le dimostrazioni vedere [2] e [3]

basate nel punto $\gamma(t)$. Si dimostra che per ogni punto $p \in A$ esistono due numeri $t_+(p) \in \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$ e $t_-(p) \in \mathbb{R}^- \cup \{-\infty\}$ tali che una curva integrale γ basata in p si possa estendere ad una curva integrale $\gamma_p :]\, t_-(p), t_+(p)\, [\ \longrightarrow A$, basata in p, che non può più essere estesa. La curva integrale $\gamma_p :]\, t_-(p), t_+(p)\, [\ \longrightarrow A$ viene detta *curva integrale massimale* del campo di vettori $\vec{X}$ *basata nel punto* p. Quando per ogni punto $p \in A$ si ha $t_+(p) = +\infty$ e $t_-(p) = -\infty$ diremo che il campo di vettori $\vec{X}$ è *completo*.

Dal teorema di Cauchy si deduce che la funzione $t_+ : A \longrightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$ è semicontinua inferiormente e che la funzione $t_- : A \longrightarrow \mathbb{R}^- \cup \{-\infty\}$ è semicontinua superiormente. Queste due proprietà ci permettono di dimostrare che l'insieme $\mathcal{D}_{\vec{X}}$ definito da

$$\mathcal{D}_{\vec{X}} = \bigcup_{p \in A} \{p\} \times]\, t_-(p), t_+(p)\, [\ \subseteq A \times \mathbb{R}$$

è un sottoinsieme aperto di $A \times \mathbb{R}$ tale che $A \times \{0\} \subset \mathcal{D}_{\vec{X}}$. Il *flusso* del campo di vettori $\vec{X} \in \mathfrak{X}(A)$ è la funzione $F_{\vec{X}} : \mathcal{D}_{\vec{X}} \longrightarrow A$ definita da

$$F_{\vec{X}}(p, t) = \gamma_p(t)$$

ed è una funzione di classe $\mathcal{C}^\infty$ tale che $F_{\vec{X}}(p, 0) = p$. Se $\vec{X}$ è un campo di vettori di classe $\mathcal{C}^k$ allora il flusso $F_{\vec{X}}$ è classe $\mathcal{C}^k$; se $\vec{X}$ è un campo di vettori analitico allora il flusso $F_{\vec{X}}$ è una funzione analitica.

Il flusso $F_{\vec{X}}$ soddisfa alla seguente identità

$$F_{\vec{X}}(p, t + \tau) = F_{\vec{X}}(F_{\vec{X}}(p, t), \tau) = F_{\vec{X}}(F_{\vec{X}}(p, \tau), t)$$

che è vera per tutti i valori di $t, \tau \in \mathbb{R}$ se il campo $\vec{X}$ è completo, altrimenti $|t|$ e $|\tau|$ devono essere abbastanza piccoli.

Le curve integrali massimali si possono ottenere fissando la prima variabile p nel flusso $F_{\vec{X}}$. Se, invece, fissiamo la seconda variabile t otteniamo delle funzioni $\varphi_t : p \longmapsto F_{\vec{X}}(p, t)$. Ogni funzione φ_t è una funzione di classe $\mathcal{C}^\infty$ definita su un sottoinsieme aperto non vuoto $A_t = \mathrm{dom}(\varphi_t) \subseteq A$ che tende ad $A_0 = A$ quando $t \to 0$. Se il campo $\vec{X}$ è completo allora le funzioni $\varphi_t : A \longrightarrow A$ formano un gruppo ad un parametro di diffeomorfismi, cioè:

$$\varphi_t \circ \varphi_\tau = \varphi_{t+\tau} \qquad \text{e} \qquad \varphi_0 = \mathrm{id}_A$$

In particolare si ha: $(\varphi_t)^{-1} = \varphi_{-t}$. Se il campo $\vec{X}$ non è completo allora $|t|$ e $|\tau|$ devono essere abbastanza piccoli e, a seconda del campo di vettori $\vec{X}$, può anche capitare che esista un $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tale che i diffeomorfismi φ_t, φ_τ e $\varphi_{t+\tau}$ siano definiti globalmente su A quando $|t| < \varepsilon$ e $|\tau| < \varepsilon$.

Un campo di vettori $\vec{X} \in \mathfrak{X}(A)$ definisce un operatore differenziale lineare del prim'ordine

$$\vec{X} : \mathcal{C}^\infty(A; \mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{C}^\infty(A; \mathbb{R})$$

che è una derivazione dell'anello delle funzioni $\mathcal{C}^\infty(A;\mathbb{R})$. Data una funzione $F \in \mathcal{C}^\infty(A;\mathbb{R})$ ed una curva integrale γ_p di $\vec{X}$ basata in un punto $p \in A$ calcoliamo la derivata

$$\left.\frac{d\,F(\gamma_p(t))}{dt}\right|_{t=0} = \left.\left[T_{\gamma_p(t)}(F)\left(\frac{d\gamma_p(t)}{dt}\right)\right]\right|_{t=0} = \left.\left[T_{\gamma_p(t)}(F)\left(\vec{X}(\gamma_p(t))\right)\right]\right|_{t=0} = T_p(F)(\vec{X}(p))$$

La funzione $p \mapsto T_p(F)(\vec{X}(p)) \in T_{F(p)}(\mathbb{R}) \equiv \{F(p)\} \times \mathbb{R}$ definisce una funzione che indicheremo con $\vec{X}(F) \in \mathcal{C}^\infty(A;\mathbb{R})$.

Considerando due campi di vettori $\vec{X}, \vec{Y} \in \mathfrak{X}(A)$, si dimostra che l'operatore differenziale $[\vec{X}, \vec{Y}]$ definito da

$$[\vec{X}, \vec{Y}](F) = \vec{X}(\vec{Y}(F)) - \vec{Y}(\vec{X}(F))$$

è una derivazione dell'anello $\mathcal{C}^\infty(A;\mathbb{R})$ proveniente da un campo di vettori che verrà indicato con $[\vec{X}, \vec{Y}]$ che verrà chiamato *commutatore* dei due campi $\vec{X}$ e $\vec{Y}$. Il commutatore $[\vec{X}, \vec{Y}]$ è ovviamente antimmetrico e si dimostra facilmente che soddisfa all'identità di Jacobi:

$$[\vec{X}, [\vec{Y}, \vec{Z}]] + [\vec{Z}, [\vec{X}, \vec{Y}]] + [\vec{Y}, [\vec{Z}, \vec{X}]] = \vec{0} \qquad \forall \vec{X}, \vec{Y}, \vec{Z} \in \mathfrak{X}(A)$$

Lo spazio vettoriale $\mathfrak{X}(A)$ dotato dell'operazione $[\cdot,\cdot]$ è un esempio di *algebra di Lie* di dimensione infinita (sul campo $\mathbb{R}$).

Le funzioni che chiameremo *integrali primi del campo di vettori* $\vec{X}$ sono le funzioni $F \in \mathcal{C}^\infty(A;\mathbb{R})$ che sono costanti lungo ogni curva integrale del campo $\vec{X}$. Per verificare se una funzione $F \in$

$\mathcal{C}^\infty(A;\mathbb{R})$ è un integrale primo dobbiamo verificare se per ogni curva integrale γ_p la funzione $F\circ\gamma_p$, che è di classe $\mathcal{C}^\infty$, è costante. Cioè, possiamo verificare che sia:

$$0=\frac{dF(\gamma_p(t))}{dt}=T_{\gamma_p(t)}(F)\left(\frac{d\gamma_p(t)}{dt}\right)=T_{\gamma_p(t)}(F)\left(\vec{X}(\gamma_p(t))\right)=\vec{X}(F)(\gamma_p(t))$$

Ovvero, possiamo verificare se $\vec{X}(F)=0$. Per fare questo non abbiamo bisogno di conoscere alcuna curva integrale, ma basta conoscere il campo di vettori $\vec{X}$.

3.6 Immagini di campi di vettori

Consideriamo due aperti A e B di uno spazio affine $\mathbf{A}$ modellato su uno spazio vettoriale $\mathbf{E}$. Se $f:A\longrightarrow B$ è un diffeomorfismo allora si può definire una funzione lineare[3] biiettiva $f_*:\mathfrak{X}(A)\longrightarrow\mathfrak{X}(B)$; per ogni campo vettoriale $\vec{\xi}\in\mathfrak{X}(A)$ il campo $f_*(\vec{\xi})\in\mathfrak{X}(B)$ è detto *immagine del campo $\vec{\xi}$ attraverso il diffeomorfismo f*. La definizione di $f_*(\vec{\xi})$ si deduce dal fatto che per ogni campo di vettori $\vec{\xi}\in\mathfrak{X}(A)$ esiste un unico campo di vettori $\vec{\eta}\in\mathfrak{X}(B)$ che rende commutativo il

[3]per le strutture di spazio vettoriale di dimensione infinita su $\mathbb{R}$ e non per le strutture di modulo.

seguente diagramma:

$$\begin{tikzcd}
T(A) \arrow[rr, "T(f)"] \arrow[d, "\tau_A"] & & T(B) \arrow[d, "\tau_B"'] \\
A \arrow[rr, "f"'] \arrow[u, bend left, "\vec{\xi}"] & & B \arrow[u, bend right, "\vec{\eta}"']
\end{tikzcd}$$

Cioè, vale la seguente identità:

$$T(f) \circ \vec{\xi} = \vec{\eta} \circ f$$

e che, essendo f un diffeomorfismo, il campo $\vec{\eta}$ è definito da

$$\vec{\eta} = T(f) \circ \vec{\xi} \circ (f)^{-1}$$

da cui si deduce che $f_*(\vec{\xi}) := \vec{\eta} = T(f) \circ \vec{\xi} \circ (f)^{-1}$.

Siccome $T(f)^{-1} = T(f^{-1})$ si deduce che è possibile definire la funzione $(f^{-1})_*$ e che $(f^{-1})_*(\vec{\eta}) = \vec{\xi}$. La funzione inversa $f^* : \mathfrak{X}(B) \longrightarrow \mathfrak{X}(A)$ è definita da $f^* = (f_*)^{-1} = (f^{-1})_*$. Il campo vettoriale $f^*(\vec{\eta}) = T(f^{-1}) \circ \vec{\eta} \circ f$ viene detto *controimmagine del campo $\vec{\eta}$ attraverso il diffeomorfismo f.*

In generale, quando la funzione f non è un diffeomorfismo non si possono definire l'immagine $f_*(\vec{\xi})$ di un campo di vettori $\vec{\xi} \in \mathfrak{X}(A)$ e nemmeno la controimmagine $f^*(\vec{\eta})$ di un campo di vettori $\vec{\eta} \in \mathfrak{X}(B)$.

Possiamo verificare facilmente che

(a) se $\gamma : I \longrightarrow A$ è una curva integrale di un campo vettoriale $\vec{\xi} \in \mathfrak{X}(A)$ allora per ogni diffeomorfismo $f : A \longrightarrow B$ la curva $f_*(\gamma) := f \circ \gamma : I \longrightarrow B$ è una curva integrale del campo di vettori $f_*(\vec{\xi}) \in \mathfrak{X}(B)$;

(b) se $F \in \mathcal{C}^\infty(A;\mathbb{R})$ è un integrale primo di un campo vettoriale $\vec{\xi} \in \mathfrak{X}(A)$ allora per ogni diffeomorfismo $f : A \longrightarrow B$ la funzione $f_*(F) = F \circ f^{-1} \in \mathcal{C}^\infty(B;\mathbb{R})$ è un integrale primo del campo di vettori $f_*(\vec{\xi}) \in \mathfrak{X}(B)$;

(c) la funzione $f_* : \mathfrak{X}(A) \longrightarrow \mathfrak{X}(B)$, oltre ad essere lineare, soddisfa alla seguente proprietà

$$f_*([\vec{\xi}_1, \vec{\xi}_2]) = [f_*(\vec{\xi}_1), f_*(\vec{\xi}_2)] \qquad \forall \vec{\xi}_1, \vec{\xi}_2 \in \mathfrak{X}(A)$$

e, quindi, è un isomorfismo di algebre di Lie.

4 Fibrato cotangente, tensori covarianti e forme differenziali

Dopo aver definito il fibrato cotangente di un aperto A di uno spazio affine $\mathbf{A}$, in questa sezione studieremo i campi di tensori covarianti, le forme differenziali, il differenziale esterno . . . .

4.1 Fibrato cotangente

Lo *spazio cotangente in un punto* p di uno spazio affine $\mathbf{A}$ è lo spazio duale dello spazio tangente in $T_p(\mathbf{A})$:

$$T_p^*(\mathbf{A}) = (T_p(\mathbf{A}))^* = \{p\} \times \mathbf{E}^*$$

Definiamo il *fibrato cotangente* $T^*(\mathbf{A})$ di uno spazio affine $\mathbf{A}$ come l'unione di tutti gli spazi cotangenti ad $\mathbf{A}$ nei suoi punti:

$$T^*(\mathbf{A}) = \bigcup_{p \in \mathbf{A}} T_p^*(\mathbf{A}) \equiv \mathbf{A} \times \mathbf{E}^*,$$

Sul fibrato cotangente $T^*(\mathbf{A}) \equiv \mathbf{A} \times \mathbf{E}^*$ consideriamo la topologia prodotto e, per il momento, non ci interessano possibili strutture come quella di spazio affine.

Se $U \subseteq \mathbf{A}$ è un sottoinsieme aperto di $\mathbf{A}$, possiamo definire

$$T_p^*(U) = T_p^*(\mathbf{A}) \qquad , \qquad T^*(U) = \bigcup_{p \in U} T_p^*(U) \equiv U \times \mathbf{E}^*$$

L'insieme $T^*(U)$ è il fibrato cotangente dell'aperto $U \subseteq \mathbf{A}$.

La proiezione naturale $\pi_{\mathbf{A}} : T^*(\mathbf{A}) \longrightarrow \mathbf{A}$ definita da $\underline{\boldsymbol{\omega}} \in T_p^*(\mathbf{A}) \Longrightarrow \pi_{\mathbf{A}}(\underline{\boldsymbol{\omega}}) = p$ è una funzione suriettiva, continua e aperta. Ovviamente, per le fibre $(\pi_{\mathbf{A}})^{-1}(p)$ della proiezione $\pi_{\mathbf{A}}$ si ha $(\pi_{\mathbf{A}})^{-1}(p) = T_p^*(\mathbf{A})$. Inoltre si ha $(\pi_{\mathbf{A}})^{-1}(U) = T^*(U)$ e $\pi_U = (\pi_{\mathbf{A}})|_{T^*(U)}$.

Se $V \subseteq \mathbf{B}$ è un sottoinsieme aperto di uno spazio affine $\mathbf{B}$ modellato su uno spazio vettoriale $\mathbf{F}$, esiste un isomorfismo di spazi vettoriali fra $T^*_{(p,q)}(U \times V)$ e $T^*_p(U) \times T^*_q(V)$ che induce un omeomorfismo fra $T^*(U \times V)$ e $T^*(U) \times T^*(V)$ e fra le proiezioni $\pi_{U\times V}$ e $\pi_U \times \pi_V$.

Data una funzione $f \in \mathcal{C}^\infty(A; B)$, possiamo considerare le funzioni lineari trasposte ${}^t(T_p(f)) : T^*_{f(p)}(B) \longrightarrow T^*_p(A)$, ma si può definire una funzione $T^*_p(f) : T^*_p(A) \longrightarrow T^*_{f(p)}(B)$ con proprietà analoghe a quelle della mappa tangente $T_p(f)$ se e solo se $T_p(f) : T_p(A) \longrightarrow T_{f(p)}(B)$ è invertibile. In quest'ultimo caso la funzione f è invertibile in un intorno del punto p e si definisce

$$T^*_p(f) = ({}^t(T_p(f)))^{-1} = {}^t((T_p(f))^{-1}) = {}^t(T_{f(p)}(f^{-1}))$$

Se $f \in \mathcal{C}^\infty(A; B)$ è un diffeomorfismo possiamo definire la mappa cotangente

$$T^*(f) : T^*(A) \longrightarrow T^*(B),$$

che è a sua volta un diffeomorfismo, che rende commutativo il seguente diagramma

$$\begin{tikzcd}
T^*(A) \arrow[r, "T^*(f)"] \arrow[d, "\pi_A"] & T^*(B) \arrow[d, "\pi_B"'] \\
A \arrow[r, "f"'] & B
\end{tikzcd}$$

ed è tale che: $T^*(g \circ f) = T^*(g) \circ T^*(f)$, $T^*(\mathrm{id}_A) = \mathrm{id}_{T^*(A)}$ e $T^*(f^{-1}) = (T^*(f))^{-1}$.

4.2 Campi di covettori

In modo analogo ai campi di vettori possiamo definire i *campi di covettori*, detti anche 1–*forme*, sull'aperto A come le sezioni del fibrato cotangente di A. Cioè: le funzioni $\underline{\boldsymbol{\omega}} : A \longrightarrow T^*(A)$ tali che $\pi_A \circ \underline{\boldsymbol{\omega}} = \mathrm{id}_A$. L'insieme delle 1–forme sull'aperto A, che verrà indicato con $\boldsymbol{\Omega}^1(A)$, è un modulo sull'anello $\mathcal{C}^\infty(A;\mathbb{R})$ che coincide col modulo duale del modulo $\mathfrak{X}(A)$.

Il prodotto interno fra un campo di vettori $\vec{\xi} \in \mathfrak{X}(A)$ ed una 1–forma $\underline{\boldsymbol{\omega}} \in \boldsymbol{\Omega}^1(A)$ è la funzione $i_{\vec{\xi}}(\underline{\boldsymbol{\omega}}) \in \mathcal{C}^\infty(A;\mathbb{R})$, che verrà indicata anche con $\vec{\xi} \rfloor \underline{\boldsymbol{\omega}}$ o con $\underline{\boldsymbol{\omega}}(\vec{\xi})$, definita da:

$$i_{\vec{\xi}}(\underline{\boldsymbol{\omega}}) : p \longmapsto i_{\vec{\xi}(p)}(\underline{\boldsymbol{\omega}}(p)) = \underline{\boldsymbol{\omega}}(p)(\vec{\xi}(p)) = \vec{\xi}(p) \rfloor \underline{\boldsymbol{\omega}}(p)$$

La funzione $(\vec{\xi}, \underline{\boldsymbol{\omega}}) \longmapsto \vec{\xi} \rfloor \underline{\boldsymbol{\omega}}$, che è bilineare per le strutture di $\mathcal{C}^\infty(A;\mathbb{R})$–moduli di $\mathfrak{X}(A)$ e $\boldsymbol{\Omega}^1(A)$, definisce una dualità separante di $\mathcal{C}^\infty(A;\mathbb{R})$–moduli e permette di identificare il modulo $\boldsymbol{\Omega}^1(A)$ col modulo duale $\mathfrak{X}(A)^*$ ed il modulo $\mathfrak{X}(A)$ col modulo duale $(\boldsymbol{\Omega}^1(A))^*$.

Data una funzione $f \in \mathcal{C}^\infty(A;B)$ ed una 1–forma $\underline{\boldsymbol{\sigma}} \in \boldsymbol{\Omega}^1(B)$ è sempre possibile definire la sua controimmagine $f^*(\underline{\boldsymbol{\sigma}}) \in \boldsymbol{\Omega}^1(A)$ anche quando f non è un diffeomorfismo. Basta infatti definire:

$$f^*(\underline{\boldsymbol{\sigma}})(p) = \underline{\boldsymbol{\sigma}}(f(p)) \circ T_p(f) = {}^t(\, T_p(f)\,)(\, \underline{\boldsymbol{\sigma}}(f(p))\,)$$

La funzione $f^* : \boldsymbol{\Omega}^1(B) \longrightarrow \boldsymbol{\Omega}^1(A)$ è lineare per le strutture di spazi vettoriali di dimensione infinita su $\mathbb{R}$. Se indichiamo con $\boldsymbol{\Omega}^0(A)$ e con $\boldsymbol{\Omega}^0(B)$ gli anelli $\mathcal{C}^\infty(A;\mathbb{R})$ e $\mathcal{C}^\infty(B;\mathbb{R})$, possiamo definire un omomorfismo di anelli $f^* : \boldsymbol{\Omega}^0(B) \longrightarrow \boldsymbol{\Omega}^0(A)$ imponendo che sia $f^*(F) = F \circ f$. Ovviamente, si ha $f^*(F_1\,\underline{\boldsymbol{\sigma}}_1 + F_2\,\underline{\boldsymbol{\sigma}}_2) = f^*(F_1)\,f^*(\underline{\boldsymbol{\sigma}}_1) + f^*(F_2)\,f^*(\underline{\boldsymbol{\sigma}}_2)$ per ogni $F_1, F_2 \in \boldsymbol{\Omega}^0(B)$ e per ogni $\underline{\boldsymbol{\sigma}}_1, \underline{\boldsymbol{\sigma}}_2 \in \boldsymbol{\Omega}^1(B)$.

Quando $f \in \mathcal{C}^\infty(A;B)$ è un diffeomorfismo, il seguente diagramma

$$\begin{tikzcd}
T^*(A) \arrow[r, "T^*(f)"] \arrow[d, "\pi_A"] & T^*(B) \arrow[d, "\pi_B"'] \\
A \arrow[r, "f"'] \arrow[u, bend left, "f^*(\underline{\boldsymbol{\sigma}})"] & B \arrow[u, bend right, "\underline{\boldsymbol{\sigma}}"']
\end{tikzcd}$$

è commutativo e possiamo definire anche $f_* : \boldsymbol{\Omega}^1(A) \longrightarrow \boldsymbol{\Omega}^1(B)$ ponendo $f_*(\underline{\boldsymbol{\omega}}) = T^*(f) \circ \underline{\boldsymbol{\omega}} \circ f^{-1}$.

Osserviamo che dall'identità $f^*(\underline{\boldsymbol{\sigma}}) = (T^*(f))^{-1} \circ \underline{\boldsymbol{\sigma}} \circ f$ deduciamo che per ogni punto $p \in A$

$$f^*(\underline{\boldsymbol{\sigma}})(p) = (T_p^*(f))^{-1}(\underline{\boldsymbol{\sigma}}(f(p))) = {}^t(T_p(f))(\underline{\boldsymbol{\sigma}}(f(p))) = \underline{\boldsymbol{\sigma}}(f(p)) \circ T_p(f)$$

Scopriamo, quindi, che per definire $f^*(\underline{\boldsymbol{\sigma}})$ non c'è alcun bisogno di supporre che f sia un diffeomorfismo. Quando f non è un diffeomorfismo la freccia orizzontale superiore non esiste, la freccia orizzontale inferiore non è invertibile e non è possibile definire l'immagine $f_*(\underline{\boldsymbol{\omega}})$.

FINE LEZIONE 8 MMdFC (2023-03-17 ore 14:00 – 16:00)

Riferimenti bibliografici

[1] N. Bourbaki, *Espaces vectoriels topologiques, Chapitres 1 et 2*; Hermann, Paris, 1966.

[2] J. Dieudonné: *Éléments d'analyse 1 / Fondements de l'analyse moderne*; Gauthier–Villars, Paris, 1969.

[3] J. E. Marsden, T. Ratiu, R. Abraham: *Manifolds, tensor analysis and applications, Third Edition*; Springer–Verlag, 2001.

[4] M. Ferraris: *A New Approach to Differential Calculus in Locally Convex Spaces*; Atti Accad. Sci. Torino, Cl. Sci. Fis. Mat. Nat., 113, 1979, 77-83.

[5] M. Ferraris: *Appunti di algebra lineare, multilineare e tensori*; 2023.