5.3.1 Proiezione stereografica per il cerchio S^1

Consideriamo lo spazio $\mathbb{R}^2$ col solito prodotto scalare e consideriamo un cerchio C_R di raggio R con centro nell'origine. Utilizzando le coordinate cartesiane ortonormali (X, Y) possiamo rappresentare il cerchio C_R come il luogo dei punti tali che

$$X^2 + Y^2 = R^2 \tag{1}$$

Proiezione dal polo nord — Invece di utilizzare le coordinate cartesiane ortonormali (X, Y) possiamo introdurre delle nuove coordinate (r, x_N) definite da

$$r = \sqrt{X^2 + Y^2} \tag{2}$$

$$x_N = \frac{X\sqrt{X^2 + Y^2}}{-Y + \sqrt{X^2 + Y^2}} \tag{3}$$

La derivata della trasformazione di coordinate $\varphi_N : (X, Y) \longmapsto (r, x_N)$ ha determinante

$$\det(D(\varphi_N)) = \frac{\sqrt{X^2 + Y^2}}{-Y + \sqrt{X^2 + Y^2}} \qquad (> 0) \tag{4}$$

e, quindi, il dominio U_N della trasformazione di coordinate φ_N è il sottoinsieme aperto di $\mathbb{R}^2$ tale che $-Y + \sqrt{X^2 + Y^2} > 0$; l'aperto U_N coincide con il piano $\mathbb{R}^2$ esclusa la semiretta chiusa $\{X = 0, Y \geq 0\}$. Il codominio di φ_N è $V_N = \varphi_N(U_N) = \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$.

La trasformazione inversa $\psi_{_N} = (\varphi_{_N})^{-1} : (r, x_{_N}) \longmapsto (\mathrm{X}, \mathrm{Y})$ è definita da

$$\mathrm{X} = \frac{2x_{_N} r^2}{r^2 + x_{_N}^2} \tag{5}$$

$$\mathrm{Y} = -r\frac{r^2 - x_{_N}^2}{r^2 + x_{_N}^2} \tag{6}$$

La derivata della trasformazione di coordinate $\psi_{_N} : V_{_N} \longrightarrow U_{_N}$ ha determinante

$$\det\Big(D\big(\psi_{_N}\big)\Big) = \frac{2r^2}{r^2 + x_{_N}^2} \qquad (> 0) \tag{7}$$

Col nuovo sistema di coordinate, il cerchio $C_{_R}$ di raggio R si ottiene chiedendo che sia $r = \mathrm{R}$ e la coordinata $x_{_N}$ va bene per tutti i punti del cerchio diversi dal polo nord $(0, \mathrm{R})$. Cioè: $\tilde{U}_{_N} = U_{_N} \cap C_{_R} = C_{_R} \setminus \{(0, \mathrm{R})\}$ e $\tilde{V}_{_N} = \mathbb{R}$.

Proiezione dal polo sud — Invece di utilizzare le coordinate cartesiane ortonormali (X, Y) possiamo introdurre delle nuove coordinate $(r, x_{_S})$ definite da

$$r = \sqrt{\mathrm{X}^2 + \mathrm{Y}^2} \tag{8}$$

$$x_{_S} = \frac{\mathrm{X}\sqrt{\mathrm{X}^2 + \mathrm{Y}^2}}{\mathrm{Y} + \sqrt{\mathrm{X}^2 + \mathrm{Y}^2}} \tag{9}$$

La derivata della trasformazione di coordinate $\varphi_{_S} : (\mathrm{X}, \mathrm{Y}) \longmapsto (r, x_{_S})$ ha determinante

$$\det(D(\varphi_{_S})) = -\frac{\sqrt{\mathrm{X}^2 + \mathrm{Y}^2}}{\mathrm{Y} + \sqrt{\mathrm{X}^2 + \mathrm{Y}^2}} \qquad (< 0) \tag{10}$$

e, quindi, il dominio U_S della trasformazione di coordinate φ_S è il sottoinsieme aperto di $\mathbb{R}^2$ tale che $Y + \sqrt{X^2 + Y^2} > 0$; l'aperto U_S coincide col piano $\mathbb{R}^2$ esclusa la semiretta chiusa $\{X = 0, Y \le 0\}$. Il codominio di φ_S è $V_S = \varphi_S(U_S) = \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$.

La trasformazione inversa $\psi_S = (\varphi_S)^{-1} : (r, x_S) \longmapsto (X, Y)$ è definita da

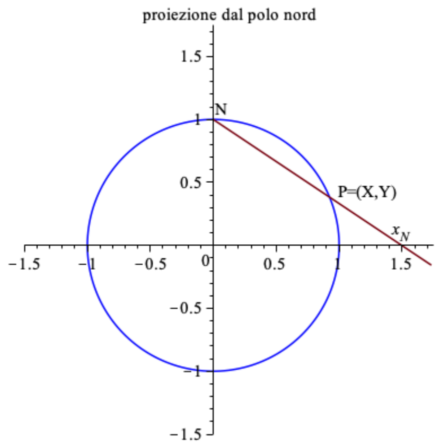
$$X = \frac{2x_S r^2}{r^2 + x_S^2} \tag{11}$$

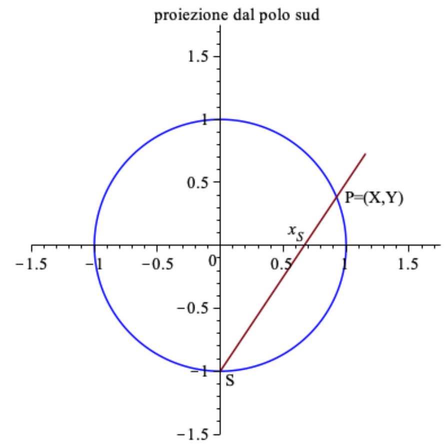
$$Y = r\frac{r^2 - x_S^2}{r^2 + x_S^2} \tag{12}$$

La derivata della trasformazione di coordinate $\psi_S : V_S \longrightarrow U_S$ ha determinante

$$\det\Big(D\big(\psi_S\big)\Big) = -\frac{2r^2}{r^2 + x_S^2} \qquad (< 0) \tag{13}$$

Col nuovo sistema di coordinate, il cerchio C_R di raggio R si ottiene chiedendo che sia $r = R$ e la coordinata x_S va bene per tutti i punti del cerchio diversi dal polo nord $(0, -R)$. Cioè: $\tilde{U}_S = U_S \cap C_R = C_R \setminus \{(0, -R)\}$ e $\tilde{V}_S = \mathbb{R}$.





Gli insiemi $\tilde{W}_{_N} = \tilde{\varphi}_{_N}(U_{_{NS}})$ e $\tilde{W}_{_S} = \tilde{\varphi}_{_S}(U_{_{NS}})$ coincidono con l'aperto $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ di $\mathbb{R}$. La trasformazione di coordinate $\tilde{\varphi}_{_{SN}} : x_{_N} \longmapsto x_{_S}$ e la trasformazione inversa $\tilde{\varphi}_{_{NS}} : x_{_S} \longmapsto x_{_N}$ sono definite da

$$x_{_S} = \frac{r^2}{x_{_N}} \qquad , \qquad x_{_N} = \frac{r^2}{x_{_S}} \tag{14}$$

hanno determinante negativo e sono diffeomorfismi di $\mathbb{R}^*$ che non cambiano il segno del numero reale.

5.3.2 Proiezione stereografica per la sfera S^2

Consideriamo lo spazio $\mathbb{R}^3$ col solito prodotto scalare e consideriamo una sfera $S_{_R}$ di raggio R con centro nell'origine. Utilizzando le coordinate cartesiane ortonormali (X, Y, Z) possiamo rappresentare la sfera S_{R} come il luogo dei punti tali che

$$\mathrm{X}^2 + \mathrm{Y}^2 + \mathrm{Z}^2 = \mathrm{R}^2 \tag{15}$$

Proiezione dal polo nord — Invece di utilizzare le coordinate cartesiane ortonormali $(\mathrm{X}, \mathrm{Y}, \mathrm{Z})$ possiamo introdurre delle nuove coordinate (r, x_{N}, y_{N}) definite da

$$r = \sqrt{\mathrm{X}^2 + \mathrm{Y}^2 + \mathrm{Z}^2} \tag{16}$$

$$x_{N} = \frac{\mathrm{X}\sqrt{\mathrm{X}^2 + \mathrm{Y}^2 + \mathrm{Z}^2}}{-\mathrm{Z} + \sqrt{\mathrm{X}^2 + \mathrm{Y}^2 + \mathrm{Z}^2}} \tag{17}$$

$$y_{N} = \frac{\mathrm{Y}\sqrt{\mathrm{X}^2 + \mathrm{Y}^2 + \mathrm{Z}^2}}{-\mathrm{Z} + \sqrt{\mathrm{X}^2 + \mathrm{Y}^2 + \mathrm{Z}^2}} \tag{18}$$

La derivata della trasformazione di coordinate $\varphi_{N} : (\mathrm{X}, \mathrm{Y}, \mathrm{Z}) \longmapsto (r, x_{N}, y_{N})$ ha determinante

$$\det(D(\varphi_{N})) = -\frac{\mathrm{X}^2 + \mathrm{Y}^2 + \mathrm{Z}^2}{(-\mathrm{Z} + \sqrt{\mathrm{X}^2 + \mathrm{Y}^2 + \mathrm{Z}^2})^2} \qquad (< 0) \tag{19}$$

e, quindi, il dominio U_{N} della la trasformazione di coordinate φ_{N} è il sottoinsieme aperto di $\mathbb{R}^3$ tale che $-\mathrm{Z} + \sqrt{\mathrm{X}^2 + \mathrm{Y}^2 + \mathrm{Z}^2} > 0$; l'aperto U_{N} coincide con lo spazio $\mathbb{R}^3$ esclusa la semiretta chiusa $\{\mathrm{X} = 0, \mathrm{Y} = 0, \mathrm{Z} \geq 0\}$. Il codominio di φ_{N} è $V_{N} = \varphi_{N}(U_{N}) = \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^2$.

La trasformazione inversa $\psi_{N} = (\varphi_{N})^{-1} : (r, x_{N}, y_{N}) \longmapsto (\mathrm{X}, \mathrm{Y}, \mathrm{Z})$ è definita da

$$\mathrm{X} = r \frac{2\, r\, x_{N}}{r^2 + x_{N}^2 + y_{N}^2} \tag{20}$$

$$Y = r\frac{2\,r\,y_{N}}{r^2 + x_{N}^2 + y_{N}^2} \tag{21}$$

$$Z = -r\frac{r^2 - (x_{N}^2 + y_{N}^2)}{r^2 + x_{N}^2 + y_{N}^2} \tag{22}$$

La derivata della trasformazione di coordinate $\psi_{N} : V_{N} \longrightarrow U_{N}$ ha determinante

$$\det\Big(D\big(\psi_{N}\big)\Big) = -\frac{4r^4}{(r^2 + x_{N}^2 + y_{N}^2)^2} \qquad (< 0) \tag{23}$$

Col nuovo sistema di coordinate, la sfera S_{R} di raggio R si ottiene chiedendo che sia $r = R$ e le coordinate (x_{N}, y_{N}) vano bene per tutti i punti della sfera diversi dal polo nord $(0, 0, R)$. Cioè: $\tilde{U}_{N} = U_{N} \cap S_{R} = S_{R} \setminus \{(0, 0, R)\}$ e $\tilde{V}_{N} = \mathbb{R}^2$.

Proiezione dal polo sud — Invece di utilizzare le coordinate cartesiane ortonormali (X, Y, Z) possiamo introdurre delle nuove coordinate (r, x_{S}, y_{S}) definite da

$$r = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2} \tag{24}$$

$$x_{S} = \frac{X\sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}}{Z + \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}} \tag{25}$$

$$y_{S} = \frac{Y\sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}}{Z + \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}} \tag{26}$$

La derivata della trasformazione di coordinate $\varphi_{S} : (X, Y, Z) \longmapsto (r, x_{S}, y_{S})$ ha determinante

$$\det(D(\varphi_{S})) = \frac{X^2 + Y^2 + Z^2}{(Z + \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2})^2} \qquad (> 0) \tag{27}$$

Col nuovo sistema di coordinate, la sfera S_R di raggio R si ottiene chiedendo che sia $r = R$ e le coordinate (x_S, y_S) vano bene per tutti i punti della sfera diversi dal polo sud $(0, 0, -R)$. Cioè: $\tilde{U}_S = U_S \cap S_R = S_R \setminus \{(0, 0, -R)\}$ e $\tilde{V}_S = \mathbb{R}^2$.

La trasformazione inversa $\psi_S = (\varphi_S)^{-1} : (r, x_S, y_S) \longmapsto (X, Y, Z)$ è definita da

$$X = r \frac{2\, r\, x_S}{r^2 + x_S^2 + y_S^2} \tag{28}$$

$$Y = r \frac{2\, r\, y_S}{r^2 + x_S^2 + y_S^2} \tag{29}$$

$$Z = r \frac{r^2 - (x_S^2 + y_S^2)}{r^2 + x_S^2 + y_S^2} \tag{30}$$

La derivata della trasformazione di coordinate ψ_S ha determinante

$$\det\Big(D\big(\psi_S\big)\Big) = \frac{4r^4}{(r^2 + x_S^2 + y_S^2)^2} \qquad (> 0) \tag{31}$$

Col nuovo sistema di coordinate, la sfera S_R di raggio R si ottiene chiedendo che sia $r = R$ e le coordinate (x_S, y_S) vano bene per tutti i punti della sfera diversi dal polo sud $(0, 0, -R)$. Cioè: $\tilde{U}_S = U_S \cap S_R = S_R \setminus \{(0, 0, -R)\}$ e $\tilde{V}_S = \mathbb{R}^2$.

Gli insiemi $\tilde{W}_N = \tilde{\varphi}_N(\tilde{U}_{NS})$ e $\tilde{W}_S = \tilde{\varphi}_S(\tilde{U}_{NS})$ coincidono con l'aperto $(\mathbb{R}^2)^* = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ di $\mathbb{R}^2$. La trasformazione di coordinate $\tilde{\varphi}_{SN} : (x_N, y_N) \longmapsto (x_S, y_S)$ e la trasformazione inversa $\tilde{\varphi}_{NS} : (x_S, y_S) \longmapsto (x_N, y_N)$ sono definite da

$$x_S = \frac{r^2\, x_N}{x_N^2 + y_N^2} \tag{32}$$

$$y_S = \frac{r^2\, y_N}{x_N^2 + y_N^2} \tag{33}$$

e da

$$x_N = \frac{r^2\, x_S}{x_S^2 + y_S^2} \tag{34}$$

$$y_N = \frac{r^2\, y_S}{x_S^2 + y_S^2} \tag{35}$$

Calcolando i determinanti $\det(D(\tilde{\varphi}_{SN}))$ e $\det(D(\tilde{\varphi}_{NS}))$ si ha

$$\det\big(D(\tilde{\varphi}_{SN})\big) = -\frac{r^4}{(x_N^2 + y_N^2)^2} \tag{36}$$

$$\det\big(D(\tilde{\varphi}_{NS})\big) = -\frac{r^4}{(x_S^2 + y_S^2)^2} \tag{37}$$

da cui deduciamo che $\tilde{\varphi}_{SN}, \tilde{\varphi}_{NS} \in \mathrm{Diff}((\mathbb{R}^2)^*)$.

Introducendo i numeri complessi $\zeta_N = x_N + i\, y_N$ e $\zeta_S = x_S - i\, y_S$ si ottiene

$$\zeta_S = \frac{r^2}{\zeta_N} \qquad , \qquad \zeta_N = \frac{r^2}{\zeta_S} \tag{38}$$

e da queste formule si deduce la struttura della sfera di Riemann.

5.3.3 Proiezione stereografica per la sfera S^3

Consideriamo lo spazio $\mathbb{R}^4$ col solito prodotto scalare e consideriamo una sfera S_R di raggio R con centro nell'origine. Utilizzando le coordinate cartesiane ortonormali (X, Y, Z, W) possiamo rappresentare la sfera S_R come il luogo dei punti tali che

$$X^2 + Y^2 + Z^2 + W^2 = R^2 \tag{39}$$

Proiezione dal polo nord — Invece di utilizzare le coordinate cartesiane ortonormali (X, Y, Z, W) possiamo introdurre delle nuove coordinate (r, x_N, y_N, z_N) definite da

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2 + W^2} && (40)\\ x_N &= \frac{X\sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2 + W^2}}{-W + \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2 + W^2}} && (41)\\ y_N &= \frac{Y\sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2 + W^2}}{-W + \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2 + W^2}} && (42)\\ z_N &= \frac{Z\sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2 + W^2}}{-W + \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2 + W^2}} && (43) \end{aligned}$$

La derivata della trasformazione di coordinate $\varphi_N : (X, Y, Z, W) \longmapsto (r, x_N, y_N, z_N)$ ha determinante

$$\det(D(\varphi_N)) = \frac{(X^2 + Y^2 + Z^2 + W^2)^{3/2}}{(-W + \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2 + W^2})^3} \qquad (> 0) \tag{44}$$

e, quindi, il dominio U_N della la trasformazione di coordinate φ_N è il sottoinsieme aperto di $\mathbb{R}^4$ tale che $-W + \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2 + W^2} > 0$; l'aperto U_N coincide con lo spazio $\mathbb{R}^4$ esclusa la semiretta chiusa $\{X = 0, Y = 0, Z = 0, W \geq 0\}$. Il codominio di φ_N è $V_N = \varphi_N(U_N) = \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^3$.

La trasformazione inversa $\psi_N = (\varphi_N)^{-1} : (r, x_N, y_N, z_N) \longmapsto (X, Y, Z, W)$ è definita da

$$X = r\,\frac{2\,r\,x_N}{r^2 + x_N^2 + y_N^2 + z_N^2} \tag{45}$$

$$
\begin{aligned}
Y &= r\,\frac{2\,r\,y_N}{r^2 + x_N^2 + y_N^2 + z_N^2} && (46)\\
Z &= r\,\frac{2\,r\,z_N}{r^2 + x_N^2 + y_N^2 + z_N^2} && (47)\\
W &= -r\frac{r^2 - (x_N^2 + y_N^2 + z_N^2)}{r^2 + x_N^2 + y_N^2 + z_N^2} && (48)
\end{aligned}
$$

La derivata della trasformazione di coordinate ψ_N ha determinante

$$\det\Big(D\big(\psi_N\big)\Big) = \frac{8r^6}{(r^2 + x_N^2 + y_N^2 + z_N^2)^3} \qquad (> 0) \tag{49}$$

Col nuovo sistema di coordinate, la sfera S_R di raggio R si ottiene chiedendo che sia $r = R$ e le coordinate (x_N, y_N, z_N) vano bene per tutti i punti della sfera diversi dal polo nord $(0, 0, 0, R)$. Cioè: $\tilde{U}_N = U_N \cap S_R = S_R \setminus \{(0, 0, 0, R)\}$ e $\tilde{V}_N = \mathbb{R}^3$.

Proiezione dal polo sud — Invece di utilizzare le coordinate cartesiane ortonormali (X, Y, Z, W) possiamo introdurre delle nuove coordinate (r, x_S, y_S, z_S) definite da

$$
\begin{aligned}
r &= \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2 + W^2} && (50)\\
x_S &= \frac{X\sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2 + W^2}}{W + \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2 + W^2}} && (51)\\
y_S &= \frac{Y\sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2 + W^2}}{W + \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2 + W^2}} && (52)\\
z_S &= \frac{Z\sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2 + W^2}}{W + \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2 + W^2}} && (53)
\end{aligned}
$$

La derivata della trasformazione di coordinate $\psi_S : (X, Y, Z, W) \longmapsto (r, x_S, y_S, z_S)$ ha determinante

$$\det(D(\psi_S)) = -\frac{(X^2 + Y^2 + Z^2 + W^2)^{3/2}}{(W + \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2 + W^2})^3} \qquad (< 0) \tag{54}$$

e, quindi, il dominio U_S della la trasformazione di coordinate φ_S è il sottoinsieme aperto di $\mathbb{R}^4$ tale che $W + \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2 + W^2} > 0$; l'aperto U_S coincide con lo spazio $\mathbb{R}^4$ esclusa la semiretta chiusa $\{X = 0, Y = 0, Z = 0, W \leq 0\}$. Il codominio di φ_N è $V_S = \varphi_S(U_S) = \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^3$.

La trasformazione inversa $\psi_S = (\varphi_S)^{-1} : (r, x_S, y_S, z_S) \longmapsto (X, Y, Z, W)$ è definita da

$$X = r\,\frac{2\,r\,x_S}{r^2 + x_S^2 + y_S^2 + z_S^2} \tag{55}$$

$$Y = r\,\frac{2\,r\,y_S}{r^2 + x_S^2 + y_S^2 + z_S^2} \tag{56}$$

$$Z = r\,\frac{2\,r\,z_S}{r^2 + x_S^2 + y_S^2 + z_S^2} \tag{57}$$

$$W = r\,\frac{r^2 - (x_S^2 + y_S^2 + z_S^2)}{r^2 + x_S^2 + y_S^2 + z_S^2} \tag{58}$$

La derivata della trasformazione di coordinate ψ_S ha determinante

$$\det\Big(D\big(\psi_S\big)\Big) = -\frac{8r^6}{(r^2 + x_S^2 + y_S^2 + z_S^2)^3} \qquad (< 0) \tag{59}$$

La sfera di raggio R si ottiene chiedendo che sia $r = R$ e le coordinate (x_S, y_S, z_S) vanno bene per tutti i punti della sfera di raggio R diversi dal polo sud $(0, 0, 0, -R)$. La trasformazione di coordinate $\tilde{\varphi}_{SN} : (x_N, y_N, z_N) \longmapsto (x_S, y_S, z_S)$ e la trasformazione inversa $\tilde{\varphi}_{NS} : (x_S, y_S, z_S) \longmapsto (x_N, y_N, z_N)$ sono definite da

$$x_S = \frac{r^2\, x_N}{x_N^2 + y_N^2 + z_N^2} \tag{60}$$

$$y_S = \frac{r^2\, y_N}{x_N^2 + y_N^2 + z_N^2} \tag{61}$$

$$z_S = \frac{r^2\, z_N}{x_N^2 + y_N^2 + z_N^2} \tag{62}$$

e

$$x_N = \frac{r^2\, x_S}{x_S^2 + y_S^2 + z_S^2} \tag{63}$$

$$y_N = \frac{r^2\, y_S}{x_S^2 + y_S^2 + z_S^2} \tag{64}$$

$$z_N = \frac{r^2\, z_S}{x_S^2 + y_S^2 + z_S^2} \tag{65}$$

Gli insiemi $\tilde{W}_N = \tilde{\varphi}_N(\tilde{U}_{NS})$ e $\tilde{W}_S = \tilde{\varphi}_S(\tilde{U}_{NS})$ coincidono con l'aperto $(\mathbb{R}^3)^* = \mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$ di $\mathbb{R}^3$. Calcolando i determinanti $\det(D(\tilde{\varphi}_{SN}))$ e $\det(D(\tilde{\varphi}_{NS}))$ si ha

$$\det\big(D(\tilde{\varphi}_{SN})\big) \;=\; -\frac{r^6}{(x_N^2 + y_N^2 + z_N^2)^3} \tag{66}$$

$$\det\big(D(\tilde{\varphi}_{NS})\big) \;=\; -\frac{r^6}{(x_S^2 + y_S^2 + z_S^2)^3} \tag{67}$$

da cui deduciamo che $\tilde{\varphi}_{SN}, \tilde{\varphi}_{NS} \in \mathrm{Diff}((\mathbb{R}^3)^*)$.

Riferimenti bibliografici

[1] N. Bourbaki, *Espaces vectoriels topologiques, Chapitres 1 et 2*; Hermann, Paris, 1966.

[2] J. Dieudonné: *Éléments d'analyse 1 / Fondements de l'analyse moderne*; Gauthier–Villars, Paris, 1969.

[3] J. E. Marsden, T. Ratiu, R. Abraham: *Manifolds, tensor analysis and applications, Third Edition*; Springer–Verlag, 2001.

[4] M. Ferraris: *A New Approach to Differential Calculus in Locally Convex Spaces*; Atti Accad. Sci. Torino, Cl. Sci. Fis. Mat. Nat., 113, 1979, 77-83.

[5] M. Ferraris: *Appunti di algebra lineare, multilineare e tensori*; 2023.