Varietà differenziabili di dimensione finita

Marco FERRARIS

Dipartimento di Matematica “Giuseppe Peano”
Università degli Studi di Torino

2023

Sommario

Considereremo solo *varietà differenziabili pure* [5] di dimensione finita. Nella quasi totalità dei casi saranno varietà reali, ma qualche volta potrebbero essere varietà complesse.

1 Strutture di varietà differenziabili

Come si può vedere dai testi citati in bibliografia, ci sono due classi di definizioni del concetto di *varietà differenziabile* reale (o complessa) di dimensione finita.

- Nella prima classe di definizioni si parte da uno spazio topologico X (con proprietà più o meno restrittive) su cui si definiscono le *carte*, gli *atlanti* e quindi le strutture di *varietà differenziabili reali* di classe C^k, C^∞, $\mathcal{C}^\omega$ (oppure analitiche complesse).

- Nella seconda classe di definizioni si parte dal concetto di *carta* su un insieme X si definiscono poi gli *atlanti* e le strutture di *varietà differenziabili reali* di classe C^k, C^∞, $\mathcal{C}^\omega$ (oppure analitiche complesse). La topologia sull'insieme X viene definita *incollando* le topologie delle *carte* e si impongono proprietà aggiuntive sulle *trasformazioni di coordinate* degli *atlanti* per ottenere spazi topologici con proprietà *ragionevoli*.

1.1 Definizione di struttura di varietà su spazi topologici

Definizione 1.1 (Carte)**.** *Una* carta di dimensione n *su uno spazio topologico* X *è una coppia* $\mathfrak{c} = (U, \varphi)$ *dove* $U \subseteq X$ *è un sottoinsieme aperto non vuoto,* $V = \varphi(U) \subseteq \mathbb{R}^n$ *è un sottoinsieme aperto e* $\varphi : U \to V$ *è un omeomorfismo.*

La funzione φ è il *sistema di coordinate* associato alla carta $\mathfrak{c} = (U, \varphi)$, l'aperto U è il *dominio* del sistema di coordinate e le funzioni $x^i := \pi^i \circ \varphi : U \to \mathbb{R}$ sono le *coordinate*. Se $U' \subseteq U$ è un sottoinsieme aperto non vuoto, allora la restrizione $\mathfrak{c}|_{U'} = (U', \varphi|_{U'})$ è ancora una carta.

Date due carte $\mathfrak{c}_1 = (U_1, \varphi_1)$ e $\mathfrak{c}_2 = (U_2, \varphi_2)$, di dimensione n, su uno spazio topologico X, definiamo l'insieme aperto $U_{12} := U_1 \cap U_2$. Nel caso in cui $U_{12} \neq \emptyset$, si possono definire le funzioni

$$\begin{aligned} \varphi_{21} &:= \varphi_2 \circ \varphi_1^{-1} : W_1 \longrightarrow W_2 \\ \varphi_{12} &:= \varphi_1 \circ \varphi_2^{-1} : W_2 \longrightarrow W_1 \end{aligned}$$

dove si è posto $W_1 = \varphi_1(U_{12})$ e $W_2 = \varphi_2(U_{12})$. Le due funzioni φ_{21} e φ_{12} risultano essere automaticamente degli omeomorfismi (o, per abuso di linguaggio, diffeomorfismi di classe $\mathcal{C}^0$) fra due aperti non vuoti di $\mathbb{R}^n$ e sono una l'inversa dell'altra: $\varphi_{21} = (\varphi_{12})^{-1}$. Se φ_{21} è una funzione di classe $\mathcal{C}^k$, con $k \geq 1$, o di classe $\mathcal{C}^\infty$ o di classe $\mathcal{C}^\omega$, con derivata $D\varphi_{21}$ sempre invertibile allora il teorema della funzione inversa ci garantisce che anche φ_{12} è della stessa classe di differenziabilità.

Definizione 1.2 (Carte compatibili)**.** *Due carte $\mathfrak{c}_1 = (U_1, \varphi_1)$ e $\mathfrak{c}_2 = (U_2, \varphi_2)$, di dimensione n, su uno spazio topologico X, diciamo che le due carte sono* compatibili di classe $\mathcal{C}^k$ ($\mathcal{C}^\infty$, $\mathcal{C}^\omega$) *se l'insieme aperto $U_{12} := U_1 \cap U_2$ è vuoto, oppure se la funzione φ_{21} (e quindi anche φ_{12}) è un diffeomorfismo di classe $\mathcal{C}^k$ ($\mathcal{C}^\infty$, $\mathcal{C}^\omega$). Le due funzioni φ_{21} e φ_{12} vengono dette* funzioni di transizione *o* trasformazioni di coordinate *o anche* cambiamenti di coordinate *fra le due carte.*

Definizione 1.3 (Atlante)**.** *Un* atlante, *di dimensione n e di classe $\mathcal{C}^k$ ($\mathcal{C}^\infty$, $\mathcal{C}^\omega$), su uno spazio topologico X è un insieme $\mathcal{A} = \{\mathfrak{c}_\alpha = (U_\alpha, \varphi_\alpha) \mid \alpha \in A\}$ di carte di dimensione n che sono due a due compatibili di classe $\mathcal{C}^k$ ($\mathcal{C}^\infty$, $\mathcal{C}^\omega$) ed i cui domini $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ formano un ricoprimento aperto di X.*

Dati un atlante $\mathcal{A}$ ed una carta $\mathfrak{c} = (U, \varphi)$ diciamo che *la carta* $\mathfrak{c}$ *è compatibile con l'atlante* $\mathcal{A}$ se $\mathcal{A}' = \mathcal{A} \cup \{\mathfrak{c}\}$ è ancora un atlante della stessa classe di differenziabilità dell'atlante $\mathcal{A}$. Se consideriamo l'insieme di tutte le carte compatibili con un atlante $\mathcal{A}$ otteniamo un atlante a cui non si può aggiungere alcun'altra carta. L'atlante così ottenuto è un *atlante massimale* (per la relazione d'ordine $\subseteq$).

Definizione 1.4 (Varietà di dimensione m)**.** *Una* varietà differenziabile di dimensione m *è una coppia* $(M, \mathcal{A})$ *dove* M *è uno spazio topologico metrizzabile e separabile, mentre* $\mathcal{A}$ *è un atlante massimale composto da carte di dimensione* m*.*

Un atlante $\mathfrak{A}$ su uno spazio topologico metrizzabile e separabile definisce una struttura di varietà differenziabile attraverso il suo atlante massimale. Se l'atlante massimale $\mathcal{A}$ è un atlante massimale di classe C^0 diremo che $(M, \mathcal{A})$ è una varietà topologica, se è un atlante massimale di classe $\mathcal{C}^k$ diremo che $(M, \mathcal{A})$ è una varietà differenziabile di classe $\mathcal{C}^k$, se è un atlante massimale di classe $\mathcal{C}^\infty$ diremo che $(M, \mathcal{A})$ è una varietà differenziabile di classe $\mathcal{C}^\infty$, se è un atlante massimale di classe $\mathcal{C}^\omega$ diremo che $(M, \mathcal{A})$ è una varietà analitica reale.

Si dimostra (vedi [5]) che:

(i) Una varietà differenziabile è uno spazio topologico localmente compatto e localmente connesso, ed ogni punto ha un intorno omeomorfo ad uno spazio metrico completo. L'insieme delle componenti connesse di una varietà differenziabile è al più numerabile.

(ii) Per ogni ricoprimento aperto $\{V_\alpha\}_{\alpha\in A}$ di una varietà differenziabile X esiste un ricoprimento aperto, numerabile e localmente finito $\{U_n\}$ più fine di $\{V_\alpha\}$ composto da aperti connessi e relativamente compatti che sono domini di carte della varietà differenziabile X.

Un ricoprimento $\{U_i\}_{i\in I}$ è più fine di un altro ricoprimento $\{V_\alpha\}_{\alpha\in A}$ se per ogni indice $i \in I$ esiste un indice α tale che $U_i \subseteq V_\alpha$. Un ricoprimento aperto $\{V_\alpha\}_{\alpha\in A}$ di uno spazio topologico X è localmente finito se per ogni punto $x \in X$ esiste un intorno aperto U di x tale che $U \cap V_\alpha \neq \emptyset$ per un numero finito di indici $\alpha \in A$.

Per come sono state definite, le varietà differenziabili sono spazi topologici paracompatti. Uno spazio topologico è paracompatto se per ogni ricoprimento aperto $\{V_\alpha\}_{\alpha\in A}$ esiste un ricoprimento aperto localmente finito $\{U_i\}_{i\in I}$ più fine di $\{V_\alpha\}_{\alpha\in A}$.

1.2 Definizione di struttura di varietà su insiemi

Se consideriamo un insieme X sul quale non è assegnata a priori una struttura di spazio topologico, possiamo definire le carte di dimensione n come coppie $\mathfrak{c} = (U, \varphi)$ dove $U \subseteq X$ è un sottoinsieme mentre $\varphi : U \longrightarrow \mathbb{R}^n$ è una funzione iniettiva tale che $V = \varphi(U) \subseteq \mathbb{R}^n$ sia un sottoinsieme aperto.

Con l'applicazione biiettiva $\varphi : U \longrightarrow V$ possiamo trasportare su U la struttura topologica di V. Per definire la compatibilità fra due carte $\mathfrak{c}_1 = (U_1, \varphi_1)$ e $\mathfrak{c}_2 = (U_2, \varphi_2)$ tali che $U_{12} = U_1 \cap U_2 \neq \emptyset$

dobbiamo chiedere che U_{12} sia aperto in U_1 per la topologia indotta da φ_1 e che sia anche aperto in U_2 per la topologia indotta da φ_2.

Per definire gli atlanti $\mathcal{A} = \{\mathfrak{c}_\alpha = (U_\alpha, \varphi_\alpha) \,|\, \alpha \in A\}$, di dimensione n e di classe $\mathcal{C}^k$, possiamo supporre che $\{U_\alpha\}_{\alpha\in A}$ sia un ricoprimento di X. Non possiamo ancora dire ricoprimento aperto di X perché, per il momento, X non ha una topologia. La topologia su X indotta dall'atlante $\mathcal{A}$ è definita come la topologia più fine che induce su ogni U_α la topologia indotta da φ_α.

Il primo problema che sorge è che la topologia indotta su X non è necessariamente una topologia di Hausdorff e, quindi, non è necessariamente metrizzabile. Poi potremmo avere problemi anche con la separabilità. Se richiediamo che la topologia indotta su X dall'atlante $\mathcal{A}$ sia metrizzabile e separabile possiamo procedere come nel paragrafo precedente.

FINE LEZIONE 10 MMdFC (2023-03-24 ore 14:00 – 16:00)

Riferimenti bibliografici

[1] S. Kobayashi, K. Nomizu: *Foundations of Differential Geometry, Vol. I*; John Wiley & Sons, New York · Chichester · Brisbane · Toronto · Singapore, 1963.

[2] S. Kobayashi, K. Nomizu: *Foundations of Differential Geometry, Vol. II*; John Wiley & Sons, New York · Chichester · Brisbane · Toronto, 1969.

[3] J. Dieudonné: *Éléments d'analyse 1 / Fondements de l'analyse moderne*; Gauthier–Villars, Paris, 1969.

[4] J. Dieudonné: *Éléments d'analyse 2*; Gauthier–Villars, Paris, 1969.

[5] J. Dieudonné: *Éléments d'analyse 3*; Gauthier–Villars, Paris, 1969.

[6] J. E. Marsden, T. Ratiu, R. Abraham: *Manifolds, tensor analysis and applications, Third Edition*; Springer–Verlag, 2001.

[7] M. Ferraris: *Appunti di algebra lineare, multilineare e tensori*; 2023.

[8] M. Ferraris: *Appunti di calcolo differenziale*; 2023.