5.1 Sezioni locali e globali di varietà fibrate

Data una varietà fibrata $\pi : Y \longrightarrow M$ diciamo che una funzione $\sigma : M \longrightarrow Y$ è una *sezione globale* della varietà fibrata se $\pi \circ \sigma = \mathrm{id}_M$. Ci sono varietà fibrate, di cui vedremo esempi più avanti, che non ammettono sezioni globali continue.

È sempre possibile definire sezioni di classe $\mathcal{C}^\infty$ su opportuni aperti $U \subseteq M$. Ad esempio se consideriamo un sistema di coordinate fibrate $(V, \psi) = (V, x^\alpha, y^i)$ definite in un intorno aperto V di un punto $p \in Y$ che si proietta su un sistema di coordinate $(U, \varphi) = (U, x^\alpha)$ attorno al punto $q = \pi(p) \in M$. Una sezione $\sigma : U \longrightarrow V$ è una funzione tale che

$$\psi \circ \sigma \circ \varphi^{-1} : (x^\alpha) \longmapsto (x^\alpha, \sigma^i(x^\beta)) \,. \tag{1}$$

La sezione σ è di classe $\mathcal{C}^k$, o di classe $\mathcal{C}^\infty$, se e solo se le funzioni σ^i sono di classe $\mathcal{C}^k$, o di classe $\mathcal{C}^\infty$. Le sezioni di questo tipo sono dette *sezioni locali di* Y *definite sull'aperto* U.

Se non utilizziamo sistemi di coordinate fibrate le formule che ci dicono che σ è una sezione sono più complicate della (1).

5.2 Morfismi di varietà fibrate

Se consideriamo due varietà fibrate $\pi : Y \longrightarrow M$ e $\rho : Z \longrightarrow N$ possiamo dire che una funzione $F \in \mathcal{C}^\infty(Y; Z)$ è un *morfismo di varietà fibrate* se manda ogni fibra di Y dentro ad una fibra di Z.

Questo può succedere se e solo se esiste una funzione $f \in \mathcal{C}^\infty(M; N)$ tale che il seguente diagramma

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[r, "F"] \arrow[d, "\pi"'] & Z \arrow[d, "\rho"] \\ M \arrow[r, "f"'] & N \end{tikzcd}$$

sia commutativo. La composizione di morfismi di varietà fibrate è ancora un morfismo di varietà fibrate. Quando F è un diffeomorfismo allora anche f, che è univocamente determinata da F, deve essere un diffeomorfismo e diremo che F (oppure la coppia (F, f)) è un *isomorfismo di varietà fibrate*, con $(F, f)^{-1} = (F^{-1}, f^{-1})$. Osserviamo che f può essere un diffeomorfismo senza che F lo sia.

In molti casi concreti che studieremo questa definizione di morfismo di varietà fibrate è fin troppo generale. Nel caso in cui $M = N$ considereremo molto spesso morfismi dove f è un diffeomorfismo, oppure dove f è la funzione identità di M

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[r, "F"] \arrow[d, "\pi"'] & Z \arrow[d, "\rho"] \\ M \arrow[r, "\mathrm{id}_M"'] & M \end{tikzcd}$$

Quando f è un diffeomorfismo, possiamo definire l'immagine $F_*(\sigma)$ di una sezione locale o globale attraverso il morfismo F. Basta infatti porre $F_*(\sigma) = F \circ \sigma \circ f^{-1}$ e si ottiene il seguente diagramma commutativo

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[rr, "F"] \arrow[d, "\pi"] & & Z \arrow[d, "\rho"'] \\ M \arrow[rr, "f"'] \arrow[u, bend left, "\sigma"] & & N \arrow[u, bend right, "F_*(\sigma)"'] \end{tikzcd}$$

Per definire la controimmagine abbiamo bisogno che F sia un isomorfismo di varietà fibrate:

$$F^* = (F^{-1})_* = (F_*)^{-1}.$$

5.3 Fibrati differenziabili

Una varietà fibrata (Y, M, π) è un *fibrato differenziabile* se tutte le fibre Y_p sono diffeomorfe ad una varietà Q, la *fibra tipo*, e se esiste un ricoprimento aperto $\{U_\mathfrak{a}\}_{\mathfrak{a}\in\mathfrak{A}}$ di M con un insieme $\{\psi_\mathfrak{a}\}_{\mathfrak{a}\in\mathfrak{A}}$ di isomorfismi $\psi_\mathfrak{a} : \pi^{-1}(U_\mathfrak{a}) \longrightarrow U_\mathfrak{a} \times Q$ di varietà fibrate su $U_\mathfrak{a}$. Gli isomorfismi $\psi_\mathfrak{a}$, oppure le coppie $(U_\mathfrak{a}, \psi_\mathfrak{a})$, sono detti *trivializzazioni locali* del fibrato (Y, M, π, Q).

Siccome il gruppo di diffeomorfismi $\mathrm{Diff}(Q)$ ha una struttura molto complicata e non ha alcuna struttura ragionevole di varietà differenziabile, di dimensione infinita, l'unica possibilità di definire una funzione $f : U \longrightarrow \mathrm{Diff}(Q)$ di classe $\mathcal{C}^\infty$ è quella di richiedere che la funzione $U \times Q \longrightarrow Q$ definita da $(x, q) \longmapsto f(x)(q)$ sia una funzione di classe $\mathcal{C}^\infty$.

5.3.1 Trivializzazioni locali

Quando abbiamo due trivializzazioni locali $(U_\mathfrak{a}, \psi_\mathfrak{a})$ e $(U_\mathfrak{b}, \psi_\mathfrak{b})$ tali che $U_{\mathfrak{ab}} = U_\mathfrak{a} \cap U_\mathfrak{b} \neq \emptyset$, i cambiamenti di trivializzazioni locali sono gli isomorfismi $\psi_{\mathfrak{ba}} = \psi_\mathfrak{b} \circ (\psi_\mathfrak{a})^{-1} : U_{\mathfrak{ab}} \times Q \longrightarrow U_{\mathfrak{ab}} \times Q$ di varietà fibrate su $U_{\mathfrak{ab}}$. In molti casi è preferibile dire che esiste una funzione $\tilde{\psi}_{\mathfrak{ba}} : U_{\mathfrak{ab}} \longrightarrow \mathrm{Diff}(Q)$, di classe $\mathcal{C}^\infty$, tale che $\psi_{\mathfrak{ba}} : (x, q) \longmapsto (x, \tilde{\psi}_{\mathfrak{ba}}(x)(q))$.

I cambiamenti di trivializzazioni locale soddisfano ad una condizione di cociclo del tipo di quelle che valgono per le trasformazioni di coordinate su una varietà:

1. per ogni indice $\mathfrak{a} \in \mathfrak{A}$ si ha $\psi_{\mathfrak{aa}} = \mathrm{id}_{U_\mathfrak{a} \times Q}$;

2. per ogni coppia di indici $\mathfrak{a}, \mathfrak{b} \in \mathfrak{A}$ si ha $\psi_{\mathfrak{ab}} = (\psi_{\mathfrak{ba}})^{-1}$;

3. per ogni terna di indici $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c} \in \mathfrak{A}$ si ha $\psi_{\mathfrak{cb}} \circ \psi_{\mathfrak{ba}} = \psi_{\mathfrak{ca}}$.

Se invece degli isomorfismi $\psi_{\mathfrak{ab}} : U_{\mathfrak{ab}} \times Q \longrightarrow U_{\mathfrak{ab}} \times Q$ usiamo le funzioni $\tilde{\psi}_{\mathfrak{ab}} : U_{\mathfrak{ab}} \longrightarrow \mathrm{Diff}(Q)$, le condizioni di cociclo sono le seguenti:

1. per ogni indice $\mathfrak{a} \in \mathfrak{A}$ e per ogni $x \in U_\mathfrak{a}$ si ha $\tilde{\psi}_{\mathfrak{aa}}(x) = \mathrm{id}_Q$;

2. per ogni coppia di indici $\mathfrak{a}, \mathfrak{b} \in \mathfrak{A}$ e per ogni $x \in U_{\mathfrak{ab}}$ si ha $\tilde{\psi}_{\mathfrak{ab}}(x) = (\tilde{\psi}_{\mathfrak{ba}}(x))^{-1}$;

3. per ogni terna di indici $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c} \in \mathfrak{A}$ e per ogni $x \in U_{\mathfrak{abc}}$ si ha $\tilde{\psi}_{\mathfrak{cb}}(x) \circ \tilde{\psi}_{\mathfrak{ba}}(x) = \tilde{\psi}_{\mathfrak{ca}}(x)$.

5.3.2 Costruzione del fibrato a partire da trivializzazioni locali

Se abbiamo una varietà M, un ricoprimento aperto $\{U_\mathfrak{a}\}_{\mathfrak{a}\in\mathfrak{A}}$ di M con un insieme $f_{\mathfrak{ba}} : U_{\mathfrak{ab}} \longrightarrow \mathrm{Diff}(Q)$ che soddisfino le condizioni di cociclo allora si può ricostruire (a meno di isomorfismi) il fibrato (Y, M, π, Q) con una famiglia di trivializzazioni locali $\psi_\mathfrak{a}$ tali che $\tilde{\psi}_{\mathfrak{ba}} = f_{\mathfrak{ba}}$.

Il procedimento da seguire è il seguente. Consideriamo l'unione disgiunta Z di tutti i prodotti cartesiani $\{U_\mathfrak{a} \times Q\}_{\mathfrak{a}\in\mathfrak{A}}$:

$$Z = \bigsqcup_{\mathfrak{a}\in\mathfrak{A}} U_\mathfrak{a} \times Q = \bigcup_{\mathfrak{a}\in\mathfrak{A}} \{\mathfrak{a}\} \times U_\mathfrak{a} \times Q$$

Sull'insieme Z definiamo una relazione $\sim$ richiedendo che

$$(\mathfrak{a}, x, q) \sim (\mathfrak{b}, x', q') \qquad \Longleftrightarrow \qquad x = x' \ \wedge \ q' = f_{\mathfrak{ba}}(x)(q)$$

Le condizioni di cociclo permettono di dimostrare che la relazione $\sim$ è una relazione di equivalenza. Lo spazio totale della varietà fibrata sarà l'insieme quoziente $Y = Z/\sim$. La proiezione $\pi : Y \longrightarrow M$ è definita da $\pi([(\mathfrak{a}, x, q)]) = x$ e le trivializzazioni locali $\psi_\mathfrak{a} : \pi^{-1}(U_\mathfrak{a}) \longrightarrow U_\mathfrak{a} \times Q$ sono definite da $\psi_\mathfrak{a}([(\mathfrak{a}, x, q)]) = (x, q)$. Si veda [5] per la dimostrazione che la topologia di Y indotta dalle trivializzazioni locali $\psi_\mathfrak{a}$ è quella di una varietà differenziabile e, quindi, che (Y, M, π, Q) è un fibrato differenziabile.

Dimostrazione presa da [5], pag. 84, Sezione (16.13.3).

Bisogna dimostrare che, con la topologia indotta dalle trivializzazioni locali $\psi_{\mathfrak{a}}$, lo spazio topologico Y è *metrizzabile*, *separabile* e *localmente compatto*. Per fare questo si utilizzano alcune proposizioni dimostrate in [4].

Definendo $Y_{\mathfrak{a}} = \pi^{-1}(U_{\mathfrak{a}})$, le funzioni $\varphi_{\mathfrak{a}} = (\psi_{\mathfrak{a}})^{-1}$ sono omeomorfismi fra le varietà $U_{\mathfrak{a}} \times Q$ e gli aperti $Y_{\mathfrak{a}} \subset Y$. Inoltre, si ha che $\{Y_{\mathfrak{a}}\}_{\mathfrak{a}\in\mathfrak{A}}$ è un ricoprimento aperto di Y e gli insiemi $Y_{\mathfrak{a}} \cap Y_{\mathfrak{b}}$ sono sia aperti di $Y_{\mathfrak{a}}$ che aperti di $Y_{\mathfrak{b}}$ in quanto

$$\varphi_{\mathfrak{a}}(U_{\mathfrak{ab}} \times Q) = Y_{\mathfrak{a}} \cap Y_{\mathfrak{b}} = \varphi_{\mathfrak{b}}(U_{\mathfrak{ab}} \times Q)$$

dove, come al solito, $U_{\mathfrak{ab}} = U_{\mathfrak{a}} \cap U_{\mathfrak{b}}$.

Per la proposizione 5.3 di [4], esiste un ricoprimento aperto numerabile $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ di M più fine del ricoprimento aperto $\{U_{\mathfrak{a}}\}_{\mathfrak{a}\in\mathfrak{A}}$. Per la proposizione 5.4 di [4], esiste allora un ricoprimento aperto numerabile $\{B_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ di M tale che $\bar{B}_n \subset A_n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$.

Per ogni indice n consideriamo un indice $\mathfrak{a}(n)$ tale che $A_n \subset U_{\mathfrak{a}(n)}$ e definiamo

$$W_n = \varphi_{\mathfrak{a}(n)}(\bar{B}_n \times Q) \subset \varphi_{\mathfrak{a}(n)}(A_n \times Q) \subset \varphi_{\mathfrak{a}(n)}(U_{\mathfrak{a}(n)} \times Q) = Y_{\mathfrak{a}(n)}$$

Siccome le parti interne $\mathring{W}_n$ degli insiemi W_n contengono gli insiemi aperti $\phi_{\alpha(n)}(B_n \times Q)$, gli insiemi aperti $\mathring{W}_n$ formano un ricoprimento di X.

La proposizione 5.2 di [4] ci assicura che se gli insiemi W_n sono chiusi in Y allora Y è *metrizzabile*, *separabile* e *localmente compatto*.

L'osservazione 5.1 di [4] ci dice che per dimostrare che gli insiemi W_n sono chiusi in Y basta dimostrare che per tutti gli indici $\mathfrak{b}$ ognuno degli insiemi $W_n \cap Y_{\mathfrak{b}}$ è chiuso in $Y_{\mathfrak{b}}$. Ovviamente, se $Y_{\mathfrak{a}(n)} \cap Y_{\mathfrak{b}} = \emptyset$ si ha che $W_n \cap Y_{\mathfrak{b}} = \emptyset$ è chiuso in $Y_{\mathfrak{b}}$. Se, invece, $W_n \cap Y_{\mathfrak{b}} \neq \emptyset$ si ha che

$$W_n \cap Y_{\mathfrak{b}} = \varphi_{\mathfrak{b}}((\bar{B}_n \cap U_{\mathfrak{b}}) \times Q) = \varphi_{\mathfrak{a}(n)}((\bar{B}_n \cap U_{\mathfrak{b}}) \times Q)$$

e, siccome $\bar{B}_n \cap U_{\mathfrak{b}}$ è un sottoinsieme chiuso di $U_{\mathfrak{b}}$, si ha che $(\bar{B}_n \cap U_{\mathfrak{b}}) \times Q$ è un sottoinsieme chiuso di $U_{\mathfrak{b}} \times Q$; quindi, $W_n \cap Y_{\mathfrak{b}}$ è un sottoinsieme chiuso di $Y_{\mathfrak{b}}$.

■

Proposizione 5.1 ([4], pag. 4, Osservazione (12.2.2))**.** *Sia $\{U_\alpha\}_{\alpha \in I}$ un ricoprimento aperto di uno spazio topologico E. Affinché un sottoinsieme $G \subset E$ sia un aperto di E è necessario e sufficiente che ogni insieme $G \cap U_\alpha$ sia aperto nel sottospazio U_α. Per passaggio al complementare, si deduce che un sottoinsieme $F \subset E$ sia un chiuso di E è necessario e sufficiente che ogni insieme $F \cap U_\alpha$ sia chiuso nel sottospazio U_α.*

Proposizione 5.2 ([4], pag. 13, Proposizione (12.4.7))**.** *Siano E uno spazio topologico, $\{U_n\}$ un ricoprimento aperto al più numerabile di E tale che i sottospazi $\{\bar{U}_n\}$ di E siano metrizzabili e separabili. Allora lo spazio topologico E è metrizzabile e separabile.*

Proposizione 5.3 ([4], pag. 20, Proposizione (12.6.1)). *Sia E uno spazio topologico metrizzabile localmente compatto separabile e sia $\mathfrak{B}$ una base di aperti per la topologia di E. Per ogni ricoprimento aperto $\{A_\lambda\}_{\lambda\in L}$ di E esiste un ricoprimento aperto $\{B_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tale che:*

1. *ogni B_n è un insieme aperto relativamente compatto appartenente a $\mathfrak{B}$,*
2. *$\{B_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ è localmente finito, numerabile e più fine del ricoprimento $\{A_\lambda\}_{\lambda\in L}$,*
3. *ogni aperto B_n interseca solo un numero finito di aperti B_m.*

Proposizione 5.4 ([4], pag. 21, Proposizione (12.6.2)). *Sia $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ un ricoprimento aperto, numerabile e localmente finito di uno spazio topologico metrizzabile E. Esiste allora un ricoprimento aperto numerabile $\{B_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ di E tale che $\bar{B}_n \subset A_n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$.*

5.4 Fibrati vettoriali

Fra i fibrati che rivestono un ruolo speciale ci sono i *fibrati vettoriali.* Diciamo che un fibrato (Y, M, π, Q) è un fibrato vettoriale se la fibra tipo Q è uno spazio vettoriale, di dimensione finita, e se esiste una famiglia di trivializzazioni locali $\{(U_{\mathfrak{a}}, \psi_{\mathfrak{a}})\}_{\mathfrak{a}\in\mathfrak{A}}$ tale che per ogni coppia di indici $\mathfrak{a}, \mathfrak{b} \in \mathfrak{A}$ e per ogni $x \in U_{\mathfrak{ab}}$ si abbia $\tilde{\psi}_{\mathfrak{ba}}(x) \in GL(Q)$. Siccome $GL(Q) \subset \mathrm{Diff}(Q)$ ha una struttura naturale di varietà differenziabile, possiamo tranquillamente richiedere che le funzioni di transizione $\tilde{\psi}_{\mathfrak{ba}} : U_{\mathfrak{ab}} \longrightarrow GL(Q)$ siano di classe $\mathcal{C}^{\infty}$. Le fibre Y_x di un fibrato vettoriale (Y, M, π, Q) hanno una struttura naturale di spazio vettoriale isomorfa a quella della fibra tipo Q.

Se consideriamo un fibrato vettoriale (Y, M, π, Q) possiamo definire il *fibrato duale* (Y^*, M, π, Q^*) che ha come spazio totale

$$Y^* = \bigcup_{x\in M} (Y_x)^*$$

e fibra tipo Q^*. Dalle funzioni di transizione $\{(U_{\mathfrak{ab}}, \tilde{\psi}_{\mathfrak{ba}})\}_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}\in\mathfrak{A}}$ di una famiglia di trivializzazioni locali $\{(U_{\mathfrak{a}}, \psi_{\mathfrak{a}})\}_{\mathfrak{a}\in\mathfrak{A}}$ consideriamo le funzioni $(\tilde{\psi}_{\mathfrak{ba}})^* : U_{\mathfrak{ab}} \longrightarrow GL(Q^*)$ definite da $(\tilde{\psi}_{\mathfrak{ba}})^* : x \longmapsto {}^t(\tilde{\psi}_{\mathfrak{ba}}(x))^{-1}$

Se consideriamo due fibrati vettoriali (Y_1, M, π_1, Q_1) e (Y_2, M, π_2, Q_2), oltre al prodotto cartesiano fibrato

$$Y_1 \times_{M} Y_2 = \bigcup_{x\in M} (Y_1)_x \times (Y_2)_x \,,$$

possiamo definire la somma diretta fibrata (che è la stessa cosa)

$$Y_1 \oplus_M Y_2 = \bigcup_{x\in M} (Y_1)_x \oplus (Y_2)_x$$

ed il prodotto tensoriale fibrato

$$Y_1 \otimes_M Y_2 = \bigcup_{x\in M} (Y_1)_x \otimes (Y_2)_x$$

Le operazioni $\times_M$, $\oplus_M$ e $\otimes_M$ sono associative. Ovviamente possiamo poi considerare, quando necessario, combinazioni di queste operazioni.

Come primi esempi di fibrati vettoriali possiamo considerare i fibrati tangenti $(T(M), \tau_M, M, \mathbb{R}^m)$, i fibrati cotangenti $(T^*(M), \pi_M, M, (\mathbb{R}^m)^*)$ e tutti i fibrati di tensori $(T^r_s(M), \pi, M, T^r_s(\mathbb{R}^m))$ con i loro sottofibrati $(A^r_s(M), \pi, M, A^r_s(\mathbb{R}^m))$ e $(S^r_s(M), \pi, M, S^r_s(\mathbb{R}^m))$.

6 Campi di vettori su varietà

In analogia con quanto detto per i campi di vettori su aperti di spazi affini (vedere [8], sezione 3.5), un campo di vettori tangenti ad una varietà M rappresenta un sistema di equazioni differenziali ordinarie del prim'ordine sulla varietà. Potremo parlare di curve integrali, curve integrali massimali, flusso, integrali primi.

I campi di vettori su M sono le sezioni $\vec{\xi} : M \longrightarrow T(M)$. Siccome $T(M)$ è un fibrato vettoriale con fibra tipo $\mathbb{R}^m$, esistono sezioni globali di classe $\mathcal{C}^\infty$ e il loro insieme verrà indicato con $\mathfrak{X}(M)$. L'insieme

$\mathfrak{X}(M)$ ha una struttura naturale di spazio vettoriale reale di dimensione infinita ed una struttura di $\mathcal{C}^\infty(M,\mathbb{R})$–modulo. È noto che esistono varietà M sulle quali esistono campi di vettori $\vec{\xi} \in \mathfrak{X}(M)$ sempre diversi da zero ($\forall x \in M : \vec{\xi}(x) \neq \vec{0} \in T_x(M)$), ma è altrettanto noto esistono varietà in cui questo non è vero (ad esempio: tutte le sfere di dimensione pari).

Le curve integrali di un campo di vettori $\vec{\xi} \in \mathfrak{X}(U)$ definito su un aperto U di una varietà differenziabile M, sono le funzioni $\gamma \in \mathcal{C}^\infty(I;U)$, definite su un intervallo aperto $I \subseteq \mathbb{R}$, e tali che per ogni valore del parametro $t \in I$ il vettore tangente alla curva parametrizzata $\gamma(t)$ nel punto t coincide col valore del campo di vettori $\vec{\xi}$ calcolato nel punto $\gamma(t)$:

$$\frac{d\gamma(t)}{dt} = \vec{\xi}(\gamma(t)) \qquad \text{dove} \qquad \frac{d\gamma(t)}{dt} = T(\gamma)(t,1) = T_t(\gamma)(1)$$

Una funzione $f \in \mathcal{C}^\infty(U;\mathbb{R})$ è un integrale primo di $\vec{\xi}$ se f è costante lungo tutte le curve integrali γ di $\vec{\xi}$.

Se l'aperto U è il dominio di un sistema di coordinate $c = (U,\varphi)$ allora possiamo definire l'immagine $\varphi_*(\vec{\xi}) = T(\varphi)\circ\vec{\xi}\circ\varphi^{-1}$ che è un campo di vettori sull'aperto $\varphi(U) \subseteq \mathbb{R}^m$. Possiamo, quindi, affermare che γ è una curva integrale di $\vec{\xi}$ se e solo se $\varphi_*(\gamma) = \varphi\circ\gamma$ è una curva integrale del campo $\varphi_*(\vec{\xi})$. Analogamente, f è un integrale primo di $\vec{\xi}$ se e solo se $\varphi_*(f) = f\circ\varphi^{-1}$ è un integrale primo di $\varphi_*(\vec{\xi})$. Si possono definire le curve integrali massimali γ_x basate nei punti $x \in U$, il flusso $F_{\vec{\xi}}$ ed i diffeomorfismi locali φ_t.

6.1 Rappresentazioni locali con coordinate

In analogia con quanto visto in [8], paragrafo 3.5, i campi di vettori $\vec{\xi} \in \mathfrak{X}(U)$ possono essere visti come operatori differenziali lineari del prim'ordine $\vec{\xi} : \mathcal{C}^\infty(U;\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{C}^\infty(U;\mathbb{R})$ che sono derivazioni dell'anello $\mathcal{C}^\infty(U;\mathbb{R})$.

Se indichiamo con (x^α) le coordinate associate ad un sistema di coordinate (U, φ), possiamo definire m campi di vettori

$$\frac{\partial}{\partial x^\alpha} : p \longmapsto \left.\frac{\partial}{\partial x^\alpha}\right|_p := (T_p(\varphi))^{-1}(\varphi(p), \vec{\boldsymbol{u}}_\alpha)$$

che formano una base per il $\mathcal{C}^\infty(U;\mathbb{R})$-modulo $\mathfrak{X}(U)$. Per rappresentare il campo $\vec{\xi} \in \mathfrak{X}(U)$ sciveremo

$$\vec{\xi} = \xi^\alpha(x)\frac{\partial}{\partial x^\alpha} \tag{2}$$

dove

$$\vec{\xi} : (x^\alpha) \longmapsto (x^\alpha, v^\beta) = (x^\alpha, \xi^\beta(x^\lambda)) \tag{3}$$

è la rappresentazione della funzione $\vec{\xi} : U \longrightarrow T(U)$ utilizzando le coordinate fibrate naturali (x^α, v^β) su $T(U)$ indotte dalle coordinate (x^α) su U.

Le formule (2) e (3) sono abusi di notazione comuni che identificano il campo $\vec{\xi}$ col campo $\varphi_*(\vec{\xi})$.

Osservazione 6.1. [Calcolo delle componenti di un campo di vettori]

Se consideriamo due sistemi di coordinate (x^α) e $(x'^{\alpha'})$, dalla (2) si ha

$$\vec{\xi} = \xi^\alpha(x)\frac{\partial}{\partial x^\alpha} = \xi'^{\alpha'}(x')\frac{\partial}{\partial x'^{\alpha'}} \tag{4}$$

da cui si deduce che

$$\vec{\xi}(x^\beta) = \xi^\beta(x) \qquad \wedge \qquad \vec{\xi}(x'^{\beta'}) = \xi'^{\beta'}(x') \tag{5}$$

Se teniamo conto della trasformazione di coordinate $\varphi_{21} : x \longmapsto x'$, si ottiene

$$\xi'^{\beta'}(x'(x)) = \xi^\beta(x)\frac{\partial x'^{\beta'}(x)}{\partial x^\beta} = \vec{\xi}(x'^{\beta'}(x)) \tag{6}$$

Analogamente, se teniamo conto della trasformazione di coordinate $\varphi_{12} : x' \longmapsto x$, si ottiene

$$\xi^\beta(x(x')) = \xi'^{\beta'}(x')\frac{\partial x^\beta(x')}{\partial x'^{\beta'}} = \vec{\xi}(x^\beta(x')) \tag{7}$$

6.2 Curve integrali

Le curve integrali di un campo di vettori $\vec{\xi} \in \mathfrak{X}(U)$ definito su un aperto U di una varietà differenziabile M, le curve integrali sono le funzioni $\gamma \in \mathcal{C}^\infty(I;U)$, definite su un intervallo aperto $I \subseteq \mathbb{R}$, e tali che per ogni valore del parametro $t \in I$ il vettore tangente alla curva parametrizzata $\gamma(t)$ nel punto t coincide col valore del campo di vettori $\vec{\xi}$ calcolato nel punto $\gamma(t)$:

$$\frac{d\gamma(t)}{dt} = \vec{\xi}(\gamma(t)) \qquad \text{dove} \qquad \frac{d\gamma(t)}{dt} = T(\gamma)(t,1) = T_t(\gamma)(1)$$

Una funzione $f \in \mathcal{C}^\infty(U;\mathbb{R})$ è un integrale primo di $\vec{\xi}$ se f è costante lungo tutte le curve integrali γ di $\vec{\xi}$.

Se l'aperto U è il dominio di un sistema di coordinate $\mathfrak{c} = (U, \varphi)$ allora possiamo definire l'immagine $\varphi_*(\vec{\xi}) = T(\varphi) \circ \vec{\xi} \circ \varphi^{-1}$ che è un campo di vettori sull'aperto $\varphi(U) \subseteq \mathbb{R}^m$. Possiamo, quindi, affermare che γ è una curva integrale di $\vec{\xi}$ se e solo se $\varphi_*(\gamma) = \varphi \circ \gamma$ è una curva integrale del campo $\varphi_*(\vec{\xi})$.

Analogamente, f è un integrale primo di $\vec{\xi}$ se e solo se $\varphi_*(f) = f \circ \varphi^{-1}$ è un integrale primo di $\varphi_*(\vec{\xi})$. Si possono definire le curve integrali massimali γ_x basate nei punti $x \in U$, il flusso $F_{\vec{\xi}}$ ed i diffeomorfismi locali φ_t.

6.3 Vettori tangenti e campi di vettori tangenti a varietà fibrate

Data una varietà fibrata $\pi : Y \longrightarrow M$, la mappa tangente $T(\pi) : T(Y) \longrightarrow T(M)$ definisce una struttura di varietà fibrata che è anche un fibrato vettoriale su Y. In coordinate fibrate (x^α, y^i) su Y, che inducono coordinate fibrate naturali $(x^\alpha, y^i, \dot{x}^\alpha, \dot{y}^i)$ su $T(Y)$, la proiezione π è definita da $\pi : (x^\alpha, y^i) \longmapsto (x^\alpha)$ e la proiezione $T(\pi)$ è definita da $T(\pi) : (x^\alpha, y^i, \dot{x}^\alpha, \dot{y}^i) \longmapsto (x^\alpha, \dot{x}^\alpha)$.

In ogni punto $p \in Y$ possiamo definire il sottospazio vettoriale $V_p(Y) = \mathrm{Ker}(T_p(\pi))$ di $T_p(Y)$. Il sottoinsieme

$$V(Y) = \bigcup_{p \in Y} V_p(Y) \equiv \bigcup_{x \in M} T(Y_x)$$

è una sottofibrato vettoriale del fibrato vettoriale $\tau_Y : T(Y) \longrightarrow Y$ che, in coordinate fibrate naturali $(x^\alpha, y^i, \dot{x}^\alpha, \dot{y}^i)$, è definito da m equazioni lineari $\dot{x}^\alpha = 0$.

Un cambiamento di coordinate fibrate

$$(x^\alpha, y^i) \longmapsto (x'^{\alpha'} = \varphi'^{\alpha'}(x^\alpha), y'^{i'} = \Phi'^{i'}(x^\alpha, y^i))$$

di Y induce una trasformazione di coordinate fibrate naturali

$$(x^\alpha, y^i, \dot{x}^\alpha, \dot{y}^i) \longmapsto \left(x'^{\alpha'} = \varphi'^{\alpha'}(x), y'^{i'} = \Phi'^{i'}(x, y), \dot{x}'^{\alpha'} = \dot{x}^\alpha \frac{\partial \varphi'^{\alpha'}}{\partial x^\alpha}, \dot{y}'^{i'} = \dot{x}^\alpha \frac{\partial \Phi'^{i'}}{\partial x^\alpha} + \dot{y}^i \frac{\partial \Phi'^{i'}}{\partial y^i}\right)$$

su $T(Y)$ che a sua volta induce una trasformazione di coordinate fibrate naturali

$$(x^\alpha, y^i, v^i) \longmapsto \left(x'^{\alpha'} = \varphi'^{\alpha'}(x), y'^{i'} = \Phi'^{i'}(x, y), v'^{i'} = v^i \frac{\partial \Phi'^{i'}}{\partial y^i}\right)$$

su $V(Y)$.

Un campo di vettori $\vec{\Xi} \in \mathfrak{X}(Y)$ è un *campo di vettori proiettabile*, rispetto alla proiezione π, se esiste un campo di vettori $\vec{\xi} \in \mathfrak{X}(M)$ tale che $T(\pi) \circ \vec{\Xi} = \vec{\xi} \circ \pi$, cioè tale che il diagramma

$$\begin{tikzcd}
T(Y) \arrow[r, "T(\pi)"] \arrow[d, "\tau_Y"] & T(M) \arrow[d, "\tau_M"'] \\
Y \arrow[r, "\pi"'] \arrow[u, bend left, "\vec{\Xi}"] & M \arrow[u, bend right, "\vec{\xi}"']
\end{tikzcd}$$

sia commutativo. L'insieme dei campi di vettori proiettabili $\mathfrak{X}_{_P}(Y)$ è un sottospazio vettoriale reale di dimensione infinita di $\mathfrak{X}(Y)$, ma non è un $\mathcal{C}^\infty(Y,\mathbb{R})$–sottomodulo.

Quando il campo di vettori $\vec{\xi}$ è il campo di vettori $\vec{0} \in \mathfrak{X}(M)$ diremo che il campo proiettabile $\vec{\Xi} \in \mathfrak{X}_{_P}(Y)$ è un *campo di vettori verticali.* L'insieme dei campi di vettori verticali $\mathfrak{X}_{_V}(Y)$ è un sottospazio vettoriale reale di dimensione infinita di $\mathfrak{X}_{_P}(Y)$ che è anche un $\mathcal{C}^\infty(Y,\mathbb{R})$–sottomodulo di $\mathfrak{X}(Y)$.

Si ha, ovviamente, $\mathfrak{X}_{_V}(Y) \subset \mathfrak{X}_{_P}(Y) \subset \mathfrak{X}(Y)$. Esiste, inoltre, un isomorfismo canonico fra lo spazio quoziente $\mathfrak{X}_{_P}(Y)/\mathfrak{X}_{_V}(Y)$ e lo spazio vettoriale $\mathfrak{X}(M)$ che si deduce dagli isomorfismi

$$T_p(Y)/V_p(Y) \longleftrightarrow T_{\pi(p)}(M)$$

indotti dalle mappe tangenti $T_p(\pi)$.

Osservazione 6.2. [Trasformazioni di coordinate fibrate per i vettori]

Ricordando che una trasformazione di coordinate fibrate sulla varietà fibrata Y è del tipo

$$(x^\alpha, y^i) \xmapsto{\quad\psi_{21}\quad} (x'^{\alpha'} = \varphi'^{\alpha'}(x^\alpha), y'^{i'} = \Phi'^{i'}(x^\alpha, y^i))\,,$$

con trasformazione inversa

$$(x'^{\alpha'}, y'^{i'}) \xmapsto{\quad\psi_{12}\quad} (x^\alpha = \varphi^\alpha(x'^{\alpha'}), y^i = \Phi^i(x'^{\alpha'}, y'^{i'}))\,,$$

la legge che lega le due basi $(\partial_\alpha, \partial_i)$ e $(\partial'_{\alpha'}, \partial'_{i'})$ è la seguente

$$\left(\frac{\partial}{\partial x^\alpha}, \frac{\partial}{\partial y^i}\right) \xmapsto{\quad (\psi_{21})_* \quad} \left(\frac{\partial \varphi'^{\alpha'}}{\partial x^\alpha}\frac{\partial}{\partial x'^{\alpha'}} + \frac{\partial \Phi'^{i'}}{\partial x^\alpha}\frac{\partial}{\partial y'^{i'}}, \frac{\partial \Phi'^{i'}}{\partial y^i}\frac{\partial}{\partial y'^{i'}}\right) .$$

I coefficienti

$$\left(\frac{\partial \varphi'^{\alpha'}}{\partial x^\alpha}, \frac{\partial \Phi'^{i'}}{\partial x^\alpha}, \frac{\partial \Phi'^{i'}}{\partial y^i}\right)$$

che sono funzioni di x o di (x, y) devono essere scritti in funzione di x' o di (x', y') con la trasformazione inversa di coordinate:

$$\left(\frac{\partial \varphi'^{\alpha'}}{\partial x^\alpha}(x), \frac{\partial \Phi'^{i'}}{\partial x^\alpha}(x,y), \frac{\partial \Phi'^{i'}}{\partial y^i}(x,y)\right) \mapsto \left(\frac{\partial \varphi'^{\alpha'}}{\partial x^\alpha}(\varphi(x')), \frac{\partial \Phi'^{i'}}{\partial x^\alpha}(\varphi(x'), \Phi(x',y')), \frac{\partial \Phi'^{i'}}{\partial y^i}(\varphi(x'), \Phi(x',y'))\right)$$

In coordinate fibrate naturali avremo che un campo di vettori $\vec{\Xi} \in \mathfrak{X}(Y)$ sarà rappresentato da espressioni del tipo

$$\vec{\Xi} = \xi^\alpha(x,y)\frac{\partial}{\partial x^\alpha} + \Xi^i(x,y)\frac{\partial}{\partial y^i}$$

Se il campo $\vec{\Xi}$ è proiettabile allora si ha

$$\vec{\Xi} = \xi^\alpha(x)\frac{\partial}{\partial x^\alpha} + \Xi^i(x,y)\frac{\partial}{\partial y^i}$$

e se $\vec{\Xi}$ è verticale si ha

$$\vec{\Xi} = \Xi^i(x,y)\frac{\partial}{\partial y^i}$$

Queste formule, che valgono solo se su Y si utilizzano coordinate fibrate, ci permettono di dimostrare facilmente che il commutatore di due campi di vettori proiettabili è un campo di vettori proiettabile e che il commutatore di due campi di vettori verticali è un campo di vettori verticali.

Se il campo di vettori $\vec{\Xi}$ è proiettabile allora abbiamo il seguente diagramma commutativo

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[r, "\Phi_t"] \arrow[d, "\pi"] & Y \arrow[d, "\pi"'] \\ M \arrow[r, "\varphi_t"'] & M \end{tikzcd}$$

dove Φ_t e φ_t sono i "gruppi ad un parametro" di diffeomorfismi (locali) indotti dai flussi di $\vec{\Xi}$ e di $\vec{\xi}$.

I diffeomorfismi Φ_t sono, quindi, isomorfismi della varietà fibrata Y, sopra ai diffeomorfismi φ_t della base M[2].

[2] Ovviamente per i diffeomorfismi è tutto locale, a meno che i campi di vettori $\vec{\Xi}$ e $\vec{\xi}$ non siano completi

Se, invece, il campo di vettori $\vec{\Xi}$ è verticale allora abbiamo il seguente diagramma commutativo

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[r, "\Phi_t"] \arrow[d, "\pi"] & Y \arrow[d, "\pi"'] \\ M \arrow[r, "\mathrm{id}_M"'] & M \end{tikzcd}$$

dove Φ_t è il "gruppo ad un parametro" di diffeomorfismi (locali) indotto dal flusso di $\vec{\Xi}$.

I diffeomorfismi Φ_t sono isomorfismi della varietà fibrata Y, sopra l'identità id_M della base M (isomorfismi verticali di Y).

7 Fibrato cotangente

Lo *spazio cotangente in un punto p* di una varietà M è lo spazio duale dello spazio tangente in $T_p(M)$:

$$T_p^*(M) = (T_p(M))^*$$

Definiamo il *fibrato cotangente* $T^*(M)$ di una varietà M come l'unione (se necessario disgiunta) di tutti gli spazi cotangenti ad M nei suoi punti:

$$T^*(M) = \bigcup_{p\in M} T_p^*(M),$$

Il fibrato cotangente $T^*(M)$ è il fibrato vettoriale duale del fibrato tangente $T(M)$. Come tale, $T^*(M)$ ha una topologia ed una struttura naturale di varietà differenziabile e come fibrato vettoriale su M è isomorfo, anche se non in modo canonico, al fibrato tangente $T(M)$.

Se $U \subseteq M$ è un sottoinsieme aperto di M, possiamo definire

$$T_p^*(U) = T_p^*(M) \qquad , \qquad T^*(U) = \bigcup_{p \in U} T_p^*(U)$$

L'insieme $T^*(U)$ è il fibrato cotangente dell'aperto $U \subseteq M$

Data una funzione $f \in \mathcal{C}^\infty(M; N)$, possiamo considerare le funzioni lineari trasposte ${}^t(T_p(f)) : T^*_{f(p)}(N) \longrightarrow T_p^*(M)$, ma si può definire una funzione $T_p^*(f) : T_p^*(M) \longrightarrow T^*_{f(p)}(N)$ con proprietà analoghe a quelle della mappa tangente $T_p(f)$ solo se $T_p(f) : T_p(M) \longrightarrow T_{f(p)}(N)$ è invertibile. In quest'ultimo caso la funzione f è invertibile in un intorno del punto p e si definisce

$$T_p^*(f) = ({}^t(T_p(f)))^{-1} = {}^t((T_p(f))^{-1}) = {}^t(T_{f(p)}(f^{-1}))$$

Se $f \in \mathcal{C}^\infty(M; N)$ è un diffeomorfismo possiamo definire la mappa cotangente $T^*(f) : T^*(M) \longrightarrow T^*(N)$, che è biiettiva, che rende commutativo il seguente diagramma

$$\begin{tikzcd} T^*(M) \arrow[r, "T^*(f)"] \arrow[d, "\pi_M"] & T^*(N) \arrow[d, "\pi_N"'] \\ M \arrow[r, "f"'] & N \end{tikzcd}$$

e tale che: $T^*(g \circ f) = T^*(g) \circ T^*(f)$, $T^*(\mathrm{id}_M) = \mathrm{id}_{T^*(M)}$ e $T^*(f^{-1}) = (T^*(f))^{-1}$.

La struttura topologica e quella differenziale di $T^*(M)$ si possono dedurre dal seguente ragionamento. Dato un punto $p \in M$ ed una carta (U, φ) di M attorno al punto p la funzione $T_p^*(\varphi) : T_p^*(M) \longrightarrow T_{\varphi(p)}^*(\mathbb{R}^m)$ definita da

$$T_p^*(\varphi) = {}^t(T_p(\varphi))^{-1}$$

è biiettiva. Le funzioni biiettive $T^*(\varphi) : T^*(U) \longrightarrow T^*(\varphi(U)) \equiv \varphi(U) \times \mathbb{R}^m$, permettono di trasportare la struttura topologica e differenziale di $\varphi(U) \times \mathbb{R}^m$ sul sottoinsieme $T^*(U) \subseteq T^*(M)$. Siccome le funzioni di transizione

$$T^*(\varphi_2) \circ (T^*(\varphi_1))^{-1} \equiv T^*(\varphi_{21}) : T^*(\varphi_1(U_{21})) \longrightarrow T^*(\varphi_2(U_{21}))$$

sono di classe $\mathcal{C}^\infty$ (o $\mathcal{C}^k$, o $\mathcal{C}^\omega$), si può procedere come per $T(M)$. Osservando che le funzioni

$$T^*(\varphi_{21}) : \varphi_1(U_{21}) \times (\mathbb{R}^m)^* \longrightarrow \varphi_2(U_{21}) \times (\mathbb{R}^m)^*$$

sono definite da

$$T^*(\varphi_{21}) : (p_1, \omega_1) \longmapsto (p_2, \omega_2) = \Big(\varphi_{21}(p_1),\ \omega_1 \circ (D(\varphi_{21})(p_1))^{-1}\Big)$$

da cui deduciamo che le funzioni $T^*(\varphi_{21})$, che sono lineari nel secondo argomento della coppia, sono in pratica le funzioni di transizione per un fibrato vettoriale. Si ha inoltre che, quando esistono, le funzioni $T^*(f) : T^*(M) \longrightarrow T^*(N)$ sono degli isomorfismi di fibrati vettoriali.

La proiezione naturale $\pi_M : T^*(M) \longrightarrow M$ definita da $\underline{\boldsymbol{\omega}} \in T^*_p(M) \Longrightarrow \pi_M(\underline{\boldsymbol{\omega}}) = p$ è una funzione suriettiva, di classe $\mathcal{C}^\infty$, e con mappa tangente suriettiva. Ovviamente, per le fibre $(\pi_M)^{-1}(p)$ della proiezione π_M si ha $(\pi_M)^{-1}(p) = T^*_p(M)$. Inoltre si ha $(\pi_M)^{-1}(U) = T^*(U)$ e $\pi_U = (\pi_M)|_{T^*(U)}$.

8 Campi di covettori

In modo analogo ai campi di vettori possiamo definire i *campi di covettori*, detti anche 1–*forme*, su una varietà M come le sezioni di classe $\mathcal{C}^\infty$ del fibrato cotangente di $T^*(M)$. Cioè: le funzioni $\underline{\boldsymbol{\omega}} : M \longrightarrow T^*(M)$ tali che $\pi_M \circ \underline{\boldsymbol{\omega}} = \mathrm{id}_M$. L'insieme delle 1–forme su M, che verrà indicato con $\boldsymbol{\Omega}^1(M)$, è un modulo sull'anello $\mathcal{C}^\infty(M;\mathbb{R})$ che coincide col modulo duale del modulo $\mathfrak{X}(M)$.

Il prodotto interno fra un campo di vettori $\vec{\xi} \in \mathfrak{X}(M)$ ed una 1–forma $\underline{\boldsymbol{\omega}} \in \boldsymbol{\Omega}^1(M)$ è la funzione $i_{\vec{\xi}}(\underline{\boldsymbol{\omega}}) \in \mathcal{C}^\infty(M;\mathbb{R})$, che verrà indicata anche con $\vec{\xi} \,\lrcorner\, \underline{\boldsymbol{\omega}}$ o con $\underline{\boldsymbol{\omega}}(\vec{\xi})$, definita da:

$$i_{\vec{\xi}}(\underline{\boldsymbol{\omega}}) : p \longmapsto i_{\vec{\xi}(p)}(\underline{\boldsymbol{\omega}}(p)) = \underline{\boldsymbol{\omega}}(p)(\vec{\xi}(p))$$

La funzione $(\vec{\xi}, \underline{\boldsymbol{\omega}}) \longmapsto \vec{\xi} \rfloor \underline{\boldsymbol{\omega}}$, che è bilineare per le strutture di $\mathcal{C}^\infty(M;\mathbb{R})$–moduli di $\mathfrak{X}(M)$ e $\boldsymbol{\Omega}^1(M)$, definisce una dualità separante di $\mathcal{C}^\infty(M;\mathbb{R})$–moduli e permette di identificare il modulo $\boldsymbol{\Omega}^1(M)$ col modulo duale $\mathfrak{X}(M)^*$ ed il modulo $\mathfrak{X}(M)$ col modulo duale $(\boldsymbol{\Omega}^1(M))^*$.

Data una funzione $f \in \mathcal{C}^\infty(M;N)$ ed una 1–forma $\underline{\boldsymbol{\sigma}} \in \boldsymbol{\Omega}^1(N)$ è sempre possibile definire la sua controimmagine $f^*(\underline{\boldsymbol{\sigma}}) \in \boldsymbol{\Omega}^1(M)$ anche quando f non è un diffeomorfismo. Basta infatti definire:

$$f^*(\underline{\boldsymbol{\sigma}})(p) = \underline{\boldsymbol{\sigma}}(f(p)) \circ T_p(f) = {}^t(\,T_p(f)\,)(\,\underline{\boldsymbol{\sigma}}(f(p))\,)$$

La funzione $f^* : \boldsymbol{\Omega}^1(N) \longrightarrow \boldsymbol{\Omega}^1(M)$ è lineare per le strutture di spazi vettoriali di dimensione infinita su $\mathbb{R}$. Se indichiamo con $\boldsymbol{\Omega}^0(M)$ e con $\boldsymbol{\Omega}^0(N)$ gli anelli $\mathcal{C}^\infty(M;\mathbb{R})$ e $\mathcal{C}^\infty(N;\mathbb{R})$, possiamo definire un omomorfismo di anelli $f^* : \boldsymbol{\Omega}^0(N) \longrightarrow \boldsymbol{\Omega}^0(M)$ imponendo che sia $f^*(F) = F \circ f$. Ovviamente, si ha $f^*(F_1\,\underline{\boldsymbol{\sigma}}_1 + F_2\,\underline{\boldsymbol{\sigma}}_2) = f^*(F_1)\,f^*(\underline{\boldsymbol{\sigma}}_1) + f^*(F_2)\,f^*(\underline{\boldsymbol{\sigma}}_2)$ per ogni $F_1, F_2 \in \boldsymbol{\Omega}^0(N)$ e per ogni $\underline{\boldsymbol{\sigma}}_1, \underline{\boldsymbol{\sigma}}_2 \in \boldsymbol{\Omega}^1(N)$.

Quando $f \in \mathcal{C}^\infty(M;N)$ è un diffeomorfismo, il seguente diagramma

$$\begin{tikzcd}
T^*(M) \arrow[r, "T^*(f)"] \arrow[d, "\pi_M"] & T^*(N) \arrow[d, "\pi_N"'] \\
M \arrow[r, "f"'] \arrow[u, bend left, "f^*(\underline{\boldsymbol{\sigma}})"] & N \arrow[u, bend right, "\underline{\boldsymbol{\sigma}}"']
\end{tikzcd}$$

è commutativo e possiamo definire anche $f_* : \mathbf{\Omega}^1(M) \longrightarrow \mathbf{\Omega}^1(N)$ ponendo $f_*(\underline{\boldsymbol{\omega}}) = T^*(f) \circ \underline{\boldsymbol{\omega}} \circ f^{-1}$.

Osserviamo che dall'identità $f^*(\underline{\boldsymbol{\sigma}}) = (T^*(f))^{-1} \circ \underline{\boldsymbol{\sigma}} \circ f$ deduciamo che per ogni punto $p \in M$

$$f^*(\underline{\boldsymbol{\sigma}})(p) = (T_p^*(f))^{-1}(\underline{\boldsymbol{\sigma}}(f(p))) = {}^t(T_p(f))(\underline{\boldsymbol{\sigma}}(f(p))) = \underline{\boldsymbol{\sigma}}(f(p)) \circ T_p(f)$$

Scopriamo, quindi, che per definire $f^*(\underline{\boldsymbol{\sigma}})$ non c'è alcun bisogno di supporre che f sia un diffeomorfismo. Quando f non è un diffeomorfismo la freccia orizzontale superiore non esiste, la freccia orizzontale inferiore non è invertibile e non è possibile definire l'immagine $f_*(\underline{\boldsymbol{\omega}})$.

Per ogni funzione $F \in \mathbf{\Omega}^0(M)$ possiamo definire il *differenziale (esterno)* come la 1–forma $dF \in \mathbf{\Omega}^1(M)$ ottenuta dalla mappa tangente $T(F)$ ricordando che $T(\mathbb{R}) \equiv \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Basta richiedere che la funzione dF sia definita da:

$$dF : p \longmapsto d_pF = \mathrm{pr}_2 \circ T_p(F) \in T_p^*(M)$$

Si verifica facilmente che il differenziale esterno gode delle seguenti proprietà:

1. $d(F_1 + F_2) = dF_1 + dF_2$ per ogni $F_1, F_2 \in \mathbf{\Omega}^0(M)$;
2. $d(F_1\, F_2) = F_2\, dF_1 + F_1\, dF_2$ per ogni $F_1, F_2 \in \mathbf{\Omega}^0(M)$;
3. $dF = 0$ se e solo se $F \in \mathbf{\Omega}^0(M)$ è costante su ogni componente connessa di M;
4. per ogni funzione $f \in \mathcal{C}^\infty(M; N)$ e per ogni funzione $G \in \mathbf{\Omega}^0(N)$ si ha $f^*(dG) = d(f^*(G))$.

Osservazione 8.1. [Trasformazioni di coordinate fibrate]

Ricordando che una trasformazione di coordinate di coordinate fibrate sulla varietà fibrata Y è del tipo

$$(x^\alpha, y^i) \xmapsto{\quad\varphi_{21}\quad} (x'^{\alpha'} = \varphi'^{\alpha'}(x^\alpha), y'^{i'} = \Phi'^{i'}(x^\alpha, y^i))\,,$$

con trasformazione inversa

$$(x'^{\alpha'}, y'^{i'}) \xmapsto{\quad\varphi_{12}\quad} (x^\alpha = \varphi^\alpha(x'^{\alpha'}), y^i = \Phi^i(x'^{\alpha'}, y'^{i'}))\,,$$

la legge che lega le due basi duali (dx^α, dy^i) e $(dx'^{\alpha'}, dy'^{i'})$ è la seguente

$$\left(dx'^{\alpha'}, dy'^{i'}\right) \xmapsto{\quad(\varphi_{21})^*\quad} \left(\frac{\partial\varphi'^{\alpha'}}{\partial x^\alpha}dx^\alpha, \frac{\partial\Phi'^{i'}}{\partial x^\alpha}dx^\alpha + \frac{\partial\Phi'^{i'}}{\partial y^i}dy^i\right)\,.$$

9 Fibrati di tensori covarianti

Lo *spazio dei tensori k–volte covarianti in un punto p* di una varietà M è lo spazio $T^0_k(T_p(M))$. Il *fibrato dei tensori k–volte covarianti* sulla varietà M è l'unione (se necessario disgiunta) di tutti gli spazi dei tensori k–volte covarianti

$$T^0_k(M) = \bigcup_{p\in M} T^0_k(T_p(M)),$$

nei vari punti di M. Il fibrato $T^0_k(M)$ è il prodotto tensoriale fibrato

$$T^0_k(M) = T^*(M) \otimes_M \ldots \otimes_M T^*(M) \qquad (k \text{ volte}),$$

è un fibrato vettoriale su M con fibra tipo $((\mathbb{R}^m)^*)^{\otimes k} \equiv ((\mathbb{R}^m)^{\otimes k})^*$. La proiezione naturale $\pi_M : T^0_k(M) \longrightarrow M$ definita da $\underline{\boldsymbol{\omega}} \in T^0_k(T_p(M)) \Longrightarrow \pi_M(\underline{\boldsymbol{\omega}}) = p$ è una funzione di classe $\mathcal{C}^\infty$ suriettiva e con mappa tangente suriettiva. Ovviamente, per le fibre $(\pi_M)^{-1}(p)$ della proiezione π_M si ha

$$(\pi_M)^{-1}(p) = T^0_k(T_p(M)) \equiv (T^*_p(M))^{\otimes k} \equiv ((T_p(M))^{\otimes k})^* \,.$$

Se consideriamo un sottoinsieme aperto $U \subseteq M$, possiamo definire il fibrato vettoriale dei tensori k–volte covarianti sull'aperto $U \in M$

$$T^0_k(U) = \bigcup_{p\in U} T^0_k(T_p(M)) \equiv \bigcup_{p\in U} (T^*_p(M))^{\otimes k} \equiv \bigcup_{p\in U} ((T_p(M))^{\otimes k})^*$$

e si ha $(\pi_M)^{-1}(U) = T^0_k(U)$ e $\pi_U = (\pi_M)|_{T^0_k(U)}$.

Data una funzione $f \in \mathcal{C}^\infty(M;N)$, possiamo considerare i prodotti cartesiani

$$[{}^t(T_p(f))]^k : [T^*_{f(p)}(N)]^k \longrightarrow [T^*_p(M)]^k \,,$$

ed i prodotti tensoriali

$$[{}^t(T_p(f))]^{\otimes k} : [T^*_{f(p)}(N)]^{\otimes k} \longrightarrow [T^*_p(M)]^{\otimes k} \,.$$

Si può definire una funzione $T^0_k(T_p(f)) : T^0_k(T_p(M)) \longrightarrow T^0_k(T_{f(p)}(N))$ con proprietà analoghe a quelle della mappa tangente $T_p(f)$ se solo se $T_p(f) : T_p(M) \longrightarrow T_{f(p)}(N)$ è invertibile. Se $f \in \mathcal{C}^\infty(M;N)$

è un diffeomorfismo possiamo definire la mappa $T^0_k(f) : T^0_k(M) \longrightarrow T^0_k(N)$, che è a sua volta un diffeomorfismo, che rende commutativo il seguente diagramma

$$\begin{tikzcd} T^0_k(M) \arrow[r, "T^0_k(f)"] \arrow[d, "\pi_M"] & T^0_k(N) \arrow[d, "\pi_N"'] \\ M \arrow[r, "f"'] & N \end{tikzcd}$$

e tale che: $T^0_k(g \circ f) = T^0_k(g) \circ T^0_k(f)$, $T^0_k(\mathrm{id}_M) = \mathrm{id}_{T^0_k(M)}$ e $T^0_k(f^{-1}) = (T^0_k(f))^{-1}$.

FINE LEZIONE 12 MMdFC (2023-04-04 ore 16:00 – 18:00)

Riferimenti bibliografici

[1] S. Kobayashi, K. Nomizu: *Foundations of Differential Geometry, Vol. I*; John Wiley & Sons, New York · Chichester · Brisbane · Toronto · Singapore, 1963.

[2] S. Kobayashi, K. Nomizu: *Foundations of Differential Geometry, Vol. II*; John Wiley & Sons, New York · Chichester · Brisbane · Toronto, 1969.

[3] J. Dieudonné: *Éléments d'analyse 1 / Fondements de l'analyse moderne*; Gauthier–Villars, Paris, 1969.

[4] J. Dieudonné: *Éléments d'analyse 2*; Gauthier–Villars, Paris, 1969.

[5] J. Dieudonné: *Éléments d'analyse 3*; Gauthier–Villars, Paris, 1969.

[6] J. E. Marsden, T. Ratiu, R. Abraham: *Manifolds, tensor analysis and applications, Third Edition*; Springer–Verlag, 2001.

[7] M. Ferraris: *Appunti di algebra lineare, multilineare e tensori*; 2023.

[8] M. Ferraris: *Appunti di calcolo differenziale*; 2023.