**Osservazione 4.5.** [Azioni sui quozienti di gruppi rispetto a sottogruppi]

Quando $H$ è un sottogruppo di Lie di un gruppo di Lie $G$, possiamo considerare due azioni di $H$ su $G$, una a sinistra ed una a destra

$$\begin{aligned} m_L &: H \times G \longrightarrow G \\ m_R &: G \times H \longrightarrow G \end{aligned}$$

che si deducono dalla moltiplicazione $m : G \times G \longrightarrow G$. La due azioni sono azioni libere che ammettono varietà quoziente indicata con $H \backslash G$, per l'azione a sinistra, e $G/H$, per l'azione a destra.

Quando il sottogruppo di Lie $H$ è un sottogruppo normale la varietà delle orbite è il gruppo quoziente $G/H$, che è un gruppo di Lie, altrimenti la varietà quoziente è uno spazio omogeneo con un'azione a sinistra

$$\begin{aligned} G \times G/H &\longrightarrow G/H \\ (g, [x]) &\longmapsto [g \cdot x] \end{aligned}$$

oppure con un'azione a destra

$$\begin{aligned} H \backslash G \times G &\longrightarrow H \backslash G \\ ([x], g) &\longmapsto [x \cdot g] \end{aligned}$$

Le due azioni sono ben definite per l'associatività dell'operazione di moltiplicazione del gruppo.

## 5 Fibrati principali

Un fibrato principale con gruppo di struttura $G$ è una varietà fibrata $(P, M, \pi)$ dotata di un'azione libera a destra $P \times G \longrightarrow P$ con varietà delle orbite $M$. Le fibre $P_x = \pi^{-1}(x)$ sopra ai punti $x \in M$ sono diffeomorfe al gruppo $G$ perché su di esse l'azione di $G$ su $P$ induce un'azione libera e transitiva.

Fra i fibrati principali ci sono i fibrati principali banali dove $P = M \times G$ e l'azione è definita da

$$\begin{array}{ccc} (M \times G) \times G & \longrightarrow & M \times G \\ ((x, g), \gamma) & \longmapsto & (x, g \cdot \gamma) \end{array}$$

Un isomorfismo di fibrati principali con gruppo di struttura $G$ è un isomorfismo di varietà fibrate

$$\begin{tikzcd} P_1 \arrow[r, "F"] \arrow[d, "\pi_1"'] & P_2 \arrow[d, "\pi_2"] \\ M \arrow[r, "f"'] & M \end{tikzcd}$$

tale che per ogni $p \in P_1$ e per ogni $g \in G$ sia $F(p \cdot g) = F(p) \cdot g$.

Anche se nella maggior parte dei casi si richiede che sia $f = \mathrm{id}_M$, il diffeomorfismo $f \in \mathrm{Diff}(M)$ non deve necessariamente coincidere con $\mathrm{id}_M$.

Si dimostra facilmente che un fibrato principale $(P, M, \pi)$ con gruppo di struttura $G$ è un fibrato differenziale $(P, M, \pi, G)$ con fibra tipo $G$. Su aperti “abbastanza piccoli” $U \subset M$ si possono definire sezioni locali $\sigma : U \longrightarrow \pi^{-1}(U)$ di classe $\mathcal{C}^\infty$, ma, come vedremo più avanti, non è detto che esistano sezioni globali $\sigma : M \longrightarrow P$ di classe $\mathcal{C}^\infty$ (o anche solo continue).

Dato un sistema di coordinate $(W, \psi) = (W, x^\alpha, y^i)$, attorno ad un punto $p \in P$, fibrate su un sistema di coordinate $(U, \varphi) = (U, x^\alpha)$, attorno al punto $\pi(p) \in M$, una sezione locale $\sigma : U \longrightarrow W \subseteq \pi^{-1}(U)$

$$\begin{tikzcd}
W \arrow[r, "\psi"] \arrow[d, "\pi"] & \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \arrow[d, "\mathrm{pr}_1"'] \\
U \arrow[r, "\varphi"'] \arrow[u, bend left, "\sigma"] & \mathbb{R}^m \arrow[u, bend right, "\psi\circ\sigma\circ\varphi^{-1}"']
\end{tikzcd}$$

è definita univocamente da una sezione del tipo

$$\psi \circ \sigma \circ \varphi^{-1} : (x^\alpha) \longmapsto (x^\alpha, \sigma^i(x^\beta))\,.$$

Fissata una sezione locale $\sigma : U \longrightarrow W$, possiamo definire la funzione

$$\begin{array}{rccc}
\bar{\psi}_\sigma : & U \times G & \longrightarrow & \pi^{-1}(U) \\
& (x, g) & \longmapsto & \sigma(x) \cdot g
\end{array}$$

che risulta essere un isomorfismo di fibrati principali con gruppo di struttura $G$. L'isomorfismo

$$\psi_\sigma = (\bar{\psi}_\sigma)^{-1} : \pi^{-1}(U) \longrightarrow U \times G$$

è una trivializzazione locale della varietà fibrata $(P, M, \pi)$. Quindi un fibrato principale è effettivamente un fibrato differenziale che è banale se e solo se ammette una sezione globale di classe $\mathcal{C}^\infty$.

Se consideriamo due trivializzazioni distinte $\psi_1 : \pi^{-1}(U) \longrightarrow U \times G$ e $\psi_2 : \pi^{-1}(U) \longrightarrow U \times G$ su un aperto $U \subseteq M$, le due funzioni

$$\psi_{21} = \psi_2 \circ (\psi_1)^{-1} : U \times G \longrightarrow U \times G$$

e

$$\psi_{12} = \psi_1 \circ (\psi_2)^{-1} : U \times G \longrightarrow U \times G$$

sono isomorfismi di fibrati principali banali e, quindi, devono esistere due funzioni $\bar{\psi}_{21}, \bar{\psi}_{12} \in \mathcal{C}^\infty(U; G)$ tali che per ogni punto $x \in U$ sia $\bar{\psi}_{12}(x) = (\bar{\psi}_{21}(x))^{-1}$ e che

$$\psi_{21}(x, g_1) = (x, \bar{\psi}_{21}(x) \cdot g_1) = (x, L_{\bar{\psi}_{21}(x)}(g_1))$$

e

$$\psi_{12}(x, g_2) = (x, \bar{\psi}_{12}(x) \cdot g_2) = (x, L_{\bar{\psi}_{12}(x)}(g_2))$$

per ogni $x \in U$ e per ogni $g_1, g_2 \in G$. Considerando le sezioni locali $\sigma_i : U \longrightarrow \pi^{-1}(U)$ associate alle trivializzazioni locali (cioè: le sezioni locali definite da $\sigma_i(x) = (\psi_i)^{-1}(x, \imath)$), possiamo affermare che $\sigma_i(x) = \sigma_j(x) \cdot \psi_{ji}(x)$.

Le mappe tangenti $T_1(\bar{L}_p) : T_1(G) \longrightarrow V_p(P)$, che sono lineari e biiettive, permettono di costruire un isomorfismo

$$P \times T_1(G) \longrightarrow V(P)$$

di fibrati vettoriali su $P$

$$\begin{array}{ccc} P \times T_1(G) & \longrightarrow & V(P) \\ \big(p, \vec{\boldsymbol{v}}\big) & \longmapsto & T_1(\bar{L}_p)(\vec{\boldsymbol{v}}) \equiv \vec{\boldsymbol{v}}_P(p) \end{array}$$

I campi di vettori del tipo $\vec{\boldsymbol{v}}_P$, che sono definiti da

$$\vec{\boldsymbol{v}}_P(p) = T_1(\bar{L}_p)(\vec{\boldsymbol{v}}) \,,$$

sono campi di vettori verticali. Rappresentando il campo di vettori $\vec{\boldsymbol{v}}_P$ in una trivializzazione otteniamo

$$\vec{\boldsymbol{v}}_P(x,g) = v^i \, \vec{\boldsymbol{\lambda}}_i(g)$$

ed l'espressione è indipendente dalla trivializzazione utilizzata.

**Esempio 5.1.** [Il fibrato delle basi $L(M)$]

Data una varietà $M$, di classe $\mathcal{C}^\infty$ e dimensione $m$, definiamo il fibrato delle basi della varietà come l'unione (per costruzione disgiunta)

$$L(M) = \bigcup_{x \in M} \mathcal{B}(T_x(M))$$

di tutte le basi degli spazi tangenti ai punti della varietà. L'insieme $L(M)$ ha una struttura naturale di varietà fibrata su $M$ in quanto è un sottoinsieme aperto, e denso, del prodotto cartesiano fibrato $T(M) \times_M \cdots \times_M T(M)$ di $m$ copie del fibrato tangente $T(M)$

$$L(M) \subset T(M) \times_M \cdots \times_M T(M)$$

che si proietta su $M$.

Su ognuna delle fibre $\mathcal{B}(T_x(M))$ di $L(M)$ c'è un'azione a destra differenziabile, libera e transitiva del gruppo di Lie $GL(m;\mathbb{R})$

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{B}(T_x(M)) \times GL(m;\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathcal{B}(T_x(M)) \\ \big((\vec{\boldsymbol{e}}_i), (g^r_s)\big) & \longmapsto & (\vec{\boldsymbol{e}}'_k) = (\vec{\boldsymbol{e}}_a\, g^a_k) \end{array}$$

Sulla varietà fibrata $\lambda_M : L(M) \longrightarrow M$ c'è un'azione libera naturale, a destra, del gruppo di Lie $GL(m;\mathbb{R})$ che induce una struttura di fibrato principale con gruppo di struttura $GL(m;\mathbb{R})$.

Sul fibrato principale $\lambda_M : L(M) \longrightarrow M$ ci sono delle coordinate fibrate "naturali" $\big(x^\alpha, e^\alpha_a\big)$ che sono indotte dai sistemi di coordinate fibrate naturali $(x^\alpha, v^\alpha)$ su $T(M)$. Con queste coordinate i vettori della base sono

$$\vec{\boldsymbol{e}}_a = e^\alpha_a \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \qquad \text{con} \qquad \det(e^\alpha_a) \neq 0\,,$$

e l'azione di $GL(m;\mathbb{R})$ su $L(M)$ è data da

$$\Big(\big(x^\alpha, e^\beta_b\big), \big(g^r_s\big)\Big) \longmapsto \big(x^\alpha, e^\beta_a\, g^a_k\big)$$

Le coordinate fibrate naturali $(x^\alpha, e^\alpha_a)$ corrispondono a delle trivializzazioni locali del fibrato principale $\lambda_M : L(M) \longrightarrow M$ e le trasformazioni di coordinate fibrate naturali sono del tipo:

$$\left(x^\alpha, e^\beta_b\right) \longmapsto \left(x'^{\alpha'}, e'^{\beta'}_b\right) = \left(x'^{\alpha'}(x), \frac{\partial x'^{\beta'}}{\partial x^\beta}(x)\, e^\beta_b\right)$$

Le basi per i vettori associate ai sistemi di coordinate $(\partial_\alpha, \partial^b_\beta)$, sono legate da leggi di trasformazione del tipo

$$\left(\frac{\partial}{\partial x^\alpha}, \frac{\partial}{\partial e^\beta_b}\right) = \left(\frac{\partial x'^{\alpha'}}{\partial x^\alpha}\frac{\partial}{\partial x'^{\alpha'}}, \frac{\partial^2 x'^{\beta'}}{\partial x^\alpha \partial x^\beta} e^\beta_b \frac{\partial}{\partial e'^{\beta'}_b} + \frac{\partial x'^{\beta'}}{\partial x^\beta}\frac{\partial}{\partial e'^{\beta'}_b}\right)$$

Per le basi duali si ha

$$\left(dx'^{\alpha'}, de'^{\beta'}_b\right) = \left(\frac{\partial x'^{\alpha'}}{\partial x^\alpha} dx^\alpha, \frac{\partial^2 x'^{\beta'}}{\partial x^\alpha \partial x^\beta} e^\beta_b dx^\alpha + \frac{\partial x'^{\beta'}}{\partial x^\beta} de^\beta_b\right)$$

Le moltiplicazioni a destra $\bar{R}_g : L(M) \to L(M)$ e le moltiplicazioni a sinistra $\bar{L}_p : GL(m;\mathbb{R}) \to L(M)$ sono definite da:

$$\begin{aligned}
\bar{R}_g \;&:\; \left(x^\alpha, e^\beta_b\right) \longmapsto \left(x^\alpha, e^\beta_a\, g^a_k\right) \\
\bar{L}_p \;&:\; \left(g^r_s\right) \longmapsto \left(x^\alpha, e^\beta_a\, g^a_k\right) \qquad \text{con } p = (x, e)
\end{aligned}$$

mentre i campi di vettori $\vec{\boldsymbol{v}}_{L(M)}$ sono rappresentati da

$$\vec{\boldsymbol{v}}_{L(M)}(x, e) = e^\beta_a\, v^a_k \frac{\partial}{\partial e^\beta_k} = v^a_k\, e^\beta_a\, \vec{\partial}^{\,k}_\beta = v^a_k\, \vec{\boldsymbol{\lambda}}^k_a$$

I campi di vettori verticali $\vec{\boldsymbol{\lambda}}^k_a$ sono globalmente ben definiti e sono una base per il modulo $\mathfrak{X}_V(P)$.

**Esempio 5.2.** [Il fibrato principale $S^3 \longrightarrow S^2$]

L'insieme $M = \mathbb{C} \times \mathbb{C} \setminus \{(0,0)\}$ può essere visto come una varietà differenziabile reale di dimensione 4 ed il gruppo abeliano $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ come un gruppo di Lie reale di dimensione 2.

Sulla varietà $M$ possiamo considerare l'azione differenziabile a destra del gruppo di Lie $\mathbb{C}^*$ definita da

$$(z_1, z_2) \cdot w = (z_1 \cdot w, z_2 \cdot w) \tag{29}$$

L'azione è libera ed ammette come varietà[3] quoziente la sfera $S^2$. La funzione analitica reale

$$\begin{array}{cccc} \pi : & M & \longrightarrow & \mathbb{C} \times \mathbb{R} \\ & (z_1, z_2) & \longmapsto & \left( \frac{2 z_1 \bar{z}_2}{|z_1|^2 + |z_2|^2}, \frac{|z_2|^2 - |z_1|^2}{|z_1|^2 + |z_2|^2} \right) \end{array}$$

definisce una delle possibili proiezioni naturali della varietà $M$ sullo spazio delle orbite $S^2 \subset \mathbb{C} \times \mathbb{R}$

$$\pi : M \longrightarrow S^2$$

e $(M, S^2, \pi)$ è un fibrato principale con gruppo di struttura $\mathbb{C}^*$.

Se consideriamo la restrizione dell'azione (29) al caso in cui $(z_1, z_2) \in S^3 \subset M$ (cioè: $|z_1|^2 + |z_2|^2 = 1$) e $w \in U(1) \subset \mathbb{C}^*$ (cioè: $|w| = 1$) abbiamo una proiezione

$$\begin{array}{cccc} \pi : & M \supset S^3 & \longrightarrow & S^2 \subset \mathbb{C} \times \mathbb{R} \\ & (z_1, z_2) & \longmapsto & \left( 2 z_1 \bar{z}_2, |z_2|^2 - |z_1|^2 \right) \end{array} \tag{30}$$

[3] Lo spazio quoziente $M/\mathbb{C}^*$ è lo spazio proiettivo complesso $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ o, equivalentemente, la sfera $S^2$ vista come sfera di Riemann.

Per vedere che la proiezione (30) è suriettiva possiamo osservare che

1. i punti di $S^3$ che si proiettano sul polo nord $(0,1) \in S^2$ sono tutti i punti del tipo $(0,u)$ tali che $u \in U(1)$;

2. i punti di $S^3$ che si proiettano sul polo sud $(0,-1) \in S^2$ sono tutti i punti del tipo $(u,0)$ tali che $u \in U(1)$;

3. se il punto $(w,r) \in S^2 \setminus \{(0,1),(0,-1)\}$, allora esiste un angolo $\psi$ tale che $|w| = \sin(2\psi)$, $r = \cos(2\psi)$ e $(w,r) = (\sin(2\psi)\,\tilde{w}, \cos(2\psi))$, con $\tilde{w} \in U(1)$; possiamo allora dire che i punti di $S^3$ che si proiettano su $(w,r)$ sono i punti del tipo $(\sin(\psi)\,\tilde{w}\,u, \cos(\psi)\,u)$ con $u \in U(1)$.

L'azione a destra (29) di $U(1)$ su $S^3$ definisce una struttura di fibrato principale con gruppo di struttura $U(1) = S^1$. Questo fibrato non ammette sezioni globali di classe $\mathcal{C}^\infty$ perché, altrimenti, la varietà $S^3$ sarebbe diffeomorfa a $S^2 \times S^1$ e questo non è possibile.

**Esempio 5.3.** [Il fibrato principale $S^7 \longrightarrow S^4$]

Indichiamo con $\mathbb{H}$ il corpo dei quaternioni di Hamilton. L'insieme $M = \mathbb{H} \times \mathbb{H} \setminus \{(0,0)\}$ può essere visto come una varietà differenziabile reale di dimensione 8 ed il gruppo $\mathbb{H}^* = \mathbb{H} \setminus \{0\}$ come un gruppo di Lie reale, non abeliano, di dimensione 4.

Sulla varietà $M$ possiamo considerare l'azione differenziabile a destra del gruppo di Lie $\mathbb{H}^*$ definita da

$$(z_1, z_2) \cdot w = (z_1 \cdot w, z_2 \cdot w) \tag{31}$$

L'azione è libera ed ammette come varietà quoziente la sfera $S^4$. La funzione analitica reale

$$\begin{array}{rcccc} \pi & : & M & \longrightarrow & \mathbb{H} \times \mathbb{R} \\ & & (z_1, z_2) & \longmapsto & \left( \frac{2 z_1 \bar{z}_2}{|z_1|^2 + |z_2|^2}, \frac{|z_2|^2 - |z_1|^2}{|z_1|^2 + |z_2|^2} \right) \end{array}$$

definisce una delle possibili proiezioni naturali della varietà $M$ sullo spazio delle orbite $S^4 \subset \mathbb{H} \times \mathbb{R}$

$$\pi : M \longrightarrow S^4$$

e $(M, S^4, \pi)$ è un fibrato principale con gruppo di struttura $\mathbb{H}^*$.

Se consideriamo la restrizione dell'azione (33) al caso in cui $(z_1, z_2) \in S^7 \subset M$ (cioè: $|z_1|^2 + |z_2|^2 = 1$) e $w \in S^3 \subset \mathbb{H}^*$ (cioè: $|w| = 1$) abbiamo una proiezione

$$\begin{array}{rcccc} \pi & : & M \supset S^7 & \longrightarrow & S^4 \subset \mathbb{H} \times \mathbb{R} \\ & & (z_1, z_2) & \longmapsto & \left( 2 z_1 \bar{z}_2, |z_2|^2 - |z_1|^2 \right) \end{array} \tag{32}$$

Per vedere che la proiezione (32) è suriettiva possiamo osservare che

1. i punti di $S^7$ che si proiettano sul polo nord $(0, 1) \in S^4$ sono tutti i punti del tipo $(0, u)$ tali che $u \in S^3$;

2. i punti di $S^7$ che si proiettano sul polo sud $(0,-1) \in S^4$ sono tutti i punti del tipo $(u,0)$ tali che $u \in S^3$;

3. se il punto $(w,r) \in S^4 \setminus \{(0,1),(0,-1)\}$, allora esiste un angolo $\psi$ tale che $|w| = \sin(2\psi)$, $r = \cos(2\psi)$ e $(w,r) = (\sin(2\psi)\,\tilde{w}, \cos(2\psi))$, con $\tilde{w} \in S^3$; possiamo allora dire che i punti di $S^7$ che si proiettano su $(w,r)$ sono i punti del tipo $(\sin(\psi)\,\tilde{w}\,u, \cos(\psi)\,u)$ con $u \in S^3$.

L'azione a destra (33) di $S^3$ su $S^7$ definisce una struttura di fibrato principale con gruppo di struttura[4] $S^3$ e base $S^4$. Questo fibrato non ammette sezioni globali di classe $\mathcal{C}^\infty$ perché, altrimenti, la varietà $S^7$ sarebbe diffeomorfa a $S^4 \times S^3$ e questo non è possibile.

**Esempio 5.4.** [Il fibrato (non principale) $S^{15} \longrightarrow S^8$]

Quando proviamo a ripetere lo stesso ragionamento sostituendo il corpo $\mathbb{H}$ dei quaternioni con l'algebra non associativa $\mathbb{O}$ degli ottonioni il procedimento non funziona perché, a causa della non associatività dell'operazione di prodotto su $\mathbb{O}^*$ e su $S^7$, la funzione

$$(z_1, z_2) \cdot w = (z_1 \cdot w, z_2 \cdot w) \tag{33}$$

non è un'azione.

[4] ricordiamo che il gruppo di Lie $S^3$ è isomorfo al gruppo di Lie $SU(2)$.

Definiamo ancora $M = \mathbb{O} \times \mathbb{O} \setminus \{(0,0)\}$ ma il fibrato

$$\begin{array}{rcl} \pi \ : \ M \supset S^{15} & \longrightarrow & S^8 \subset \mathbb{O} \times \mathbb{R} \\ (z_1, z_2) & \longmapsto & \left(2z_1\bar{z}_2, |z_2|^2 - |z_1|^2\right) \end{array} \tag{34}$$

che si ottiene non è più un fibrato principale perché $S^7$ non è un gruppo.

Per vedere che la proiezione (34) è suriettiva possiamo possiamo procedere come abbiamo fatto nel caso $S^3 \longrightarrow S^2$ e $S^7 \longrightarrow S^4$

1. i punti di $S^{15}$ che si proiettano sul polo nord $(0,1) \in S^8$ sono tutti i punti del tipo $(0,u)$ tali che $u \in S^7$;
2. i punti di $S^{15}$ che si proiettano sul polo sud $(0,-1) \in S^8$ sono tutti i punti del tipo $(u,0)$ tali che $u \in S^7$;
3. se il punto $(w,r) \in S^8 \setminus \{(0,1),(0,-1)\}$, allora esiste un angolo $\psi$ tale che $|w| = \sin(2\psi)$, $r = \cos(2\psi)$ e $(w,r) = (\sin(2\psi)\,\tilde{w}, \cos(2\psi))$, con $\tilde{w} \in S^7$; possiamo allora dire che i punti di $S^{15}$ che si proiettano su $(w,r)$ sono i punti del tipo $(\sin(\psi)\,\tilde{w}\,u, \cos(\psi)\,u)$ con $u \in S^7$.

### 5.1 Campi di tensori invarianti sui fibrati principali

L'azione a destra $P \times G \longrightarrow P$ del gruppo di struttura $G$ su un fibrato principale $(P, M, \pi)$ permette di considerare campi di tensori su $P$ che sono invarianti rispetto a tutte le moltiplicazioni a destra

$\bar{R}_g : P \longrightarrow P$.

Le funzioni invarianti sono tutte e sole le controimmagini $\pi^*(f) = f \circ \pi$ delle funzioni $f \in \mathcal{C}^\infty(M;\mathbb{R})$. Per verificare se una funzione $f \in \mathcal{C}^\infty(M;\mathbb{R})$ è invariante per l'azione a destra di $G$ su $P$ bisogna verificare che per ogni $g \in G$ sia $(\bar{R}_g)^*(f) = f$. Quindi per ogni punto $p \in P$ sia

$$\big((\bar{R}_g)^*(f)\big)(p) = f\big(\bar{R}_g)(p)\big) = f\big(\bar{L}_p)(g)\big)$$

Se consideriamo ora una curva $t \longmapsto \gamma(t)$ basata nell'identità $\mathbb{1} \in G$ e difiniamo $\vec{\boldsymbol{v}} = \left(\frac{d\gamma(t)}{dt}\right)_{|t=0} \in T_{\mathbb{1}}G$, si ha che deve essere $\vec{\boldsymbol{v}}_P(f) = 0$ per ogni $\vec{\boldsymbol{v}} \in T_{\mathbb{1}}G$.

Per studiare le 1-forme ed i campi di vettori invarianti per l'azione del gruppo $G$ conviene rappresentare gli oggetti attraverso trivializzazioni locali $\psi : \pi^{-1}(U) \xrightarrow{\qquad\qquad} U \times G$ del fibrato principale, tali che sull'aperto $U \subseteq M$ ci sia un sistema di coordinate $(U, x^1, \ldots, x^m)$.

#### 5.1.1 Campi di vettori invarianti sui fibrati principali

Dato un campo di vettori $\vec{\xi} \in \mathfrak{X}(P)$, consideriamo il campo di vettori $\psi_*(\vec{\xi}) \in \mathfrak{X}(U \times G)$ che si può scrivere come segue

$$\psi_*(\vec{\xi}) = \xi^\alpha(x,g)\vec{\partial}_\alpha + \tilde{\xi}^k(x,g)\vec{\boldsymbol{\rho}}_k(g)$$

dove $(\vec{\boldsymbol{\rho}}_1, \ldots, \vec{\boldsymbol{\rho}}_n)$ è una base per $\mathfrak{X}_R(G)$. Con un abuso molto diffuso di notazione identificheremo sempre il campo di vettori $\vec{\xi}$ col campo di vettori $\psi_*(\vec{\xi})$.

Come sappiamo, la moltiplicazione a destra $\bar{R}_\gamma : U \times G \longrightarrow U \times G$ è definita

$$\bar{R}_\gamma = \mathrm{id}_U \times R_\gamma : (x, g) \longmapsto \big(x, R_\gamma(g)\big) = \big(x, g \cdot \gamma\big)$$

L'immagine del campo $\psi_*(\vec{\xi})$ attraverso la moltiplicazione a destra

$$\begin{aligned} \bar{R}_\gamma = \mathrm{id}_U \times R_\gamma \ : \ U \times G &\longrightarrow U \times G \\ (x, g) &\longmapsto \big(x, R_\gamma(g)\big) = \big(x, g \cdot \gamma\big) \end{aligned}$$

è definita da

$$\begin{aligned} (\bar{R}_\gamma)_*(\vec{\xi}) &= (\bar{R}_\gamma)_* \Big(\xi^\alpha(x, g)\vec{\partial}_\alpha + \tilde{\xi}^k(x, g)\vec{\boldsymbol{\rho}}_k(g)\Big) \\ &= (\bar{R}_\gamma)_*\Big(\xi^\alpha(x, g)\Big)\vec{\partial}_\alpha + (\bar{R}_\gamma)_*\Big(\tilde{\xi}^k(x, g)\Big)\vec{\boldsymbol{\rho}}_k(g) \\ &= \xi^\alpha\big(x, g \cdot \gamma^{-1}\big)\vec{\partial}_\alpha + \tilde{\xi}^k\big(x, g \cdot \gamma^{-1}\big)\vec{\boldsymbol{\rho}}_k(g) \end{aligned}$$

Quindi il campo $\vec{\xi}$ è invariante se e solo se i coefficienti $\xi^\alpha$ e $\tilde{\xi}^k$ non dipendono dal punto $g \in G$, cioè:

$$\vec{\xi} = \xi^\alpha(x)\vec{\partial}_\alpha + \tilde{\xi}^k(x)\vec{\boldsymbol{\rho}}_k(g)$$

In particolare, i campi di vettori $\vec{\xi}$ invarianti sono campi proiettabili.

**Esempio 5.5.** [Campi di vettori invarianti su $L(M)$]

Scegliendo di lavorare con sistemi di coordinate fibrate naturali $(x^\alpha, e^\beta_k)$ su un aperto $(\lambda_M)^{-1}(U)$, definiamo i coefficienti $\theta^a_\alpha$ come le componenti della matrice inversa della matrice $(e^\beta_b)$: cioè tali che

$$\theta^a_\sigma\, e^\sigma_b = \delta^a_b \qquad \text{e} \qquad e^\beta_k \theta^k_\alpha = \delta^\beta_\alpha$$

Un campo di vettori $\vec{\xi} \in \mathfrak{X}(L(M))$ avrà un'espressione del tipo

$$\begin{aligned}\vec{\xi} &= \xi^\beta(x,e)\partial_\beta + \xi^\beta_k(x,e)\,\partial^k_\beta \\ &= \xi^\beta(x,e)\partial_\beta + \xi^\beta_k(x,e)\,\theta^b_\beta\,\vec{\boldsymbol{\lambda}}^k_b \\ &= \xi^\beta(x,e)\partial_\beta + \xi^\beta_k(x,e)\,\theta^k_\alpha\,\vec{\boldsymbol{\rho}}^\alpha_\beta\end{aligned}$$

dove abbiamo utilizzato i campi di vettori verticali globali

$$\vec{\boldsymbol{\lambda}}^a_b = e^\sigma_b \frac{\partial}{\partial e^\sigma_a} = e^\sigma_b \vec{\partial}^{\,a}_{\sigma}$$

che sono una base di $\mathfrak{X}_L(GL(m;\mathbb{R}))$ ed i campi di vettori verticali locali

$$\vec{\boldsymbol{\rho}}^\alpha_\beta = e^\alpha_s \frac{\partial}{\partial e^\beta_s} = e^\alpha_s\,\vec{\partial}^{\,s}_{\beta}$$

che sono una base di $\mathfrak{X}_R(GL(m;\mathbb{R}))$.

Il campo di vettori $\vec{\xi}$ è invariante per le moltiplicazioni a destra $\bar{R}_g$ se e solo se

$$\vec{\xi} = \xi^\beta(x)\partial_\beta + \xi^\beta_\alpha(x)\,\vec{\boldsymbol{\rho}}^\alpha_\beta = \xi^\beta(x)\partial_\beta + \xi^\beta_\alpha(x)\,e^\alpha_k\,\vec{\partial}^{\,k}_{\beta}$$

I campi di vettori del tipo $\vec{\boldsymbol{v}}_P$ sono campi di vettori verticali definiti da

$$\begin{aligned}\vec{\boldsymbol{v}}_P \;:\; & P \longmapsto T(P) \\ & (x^\alpha, e^\beta_a) \longmapsto (x^\alpha, e^\beta_a, 0, e^\beta_a\, v^a_k)\end{aligned}$$

o, equivalentemente, da

$$\vec{\boldsymbol{v}}_P(x,e) = e^\beta_a\, v^a_k\, \frac{\partial}{\partial e^\beta_k} = v^a_k\, e^\sigma_a\, \vec{\partial}^{\,k}_{\ \sigma} = v^a_k\, \vec{\boldsymbol{\lambda}}^k_a$$

e, in generale, non sono invarianti per le moltiplicazioni a destra $\bar{R}_g$.

### 5.1.2 1–forme invarianti sui fibrati principali

Quando vengono rappresentate attraverso una trivializzazione locale $\psi$, le 1–forme invarianti per le moltiplicazioni a destra $\bar{R}_\gamma$ su un fibrato principale $(P, M, \pi)$ sono 1–forme del tipo

$$\underline{\boldsymbol{\omega}} = \omega_\alpha(x) dx^\alpha + \omega_i(x) \underline{\boldsymbol{\theta}}^i_R(g)$$

Ovviamente le 1–forme orizzontali $\underline{\boldsymbol{\omega}} \in \boldsymbol{\Omega}^1_H(P)$ sono invarianti per le moltiplicazioni a destra $\bar{R}_\gamma$, ma ci sono 1–forme invarianti che non sono orizzontali.

**Esempio 5.6.** [1–forme invarianti su $L(M)$]

Scegliendo di lavorare con sistemi di coordinate fibrate naturali $(x^\alpha, e^\beta_k)$ su un aperto $(\lambda_M)^{-1}(U)$, definiamo i coefficienti $\theta^a_\alpha$ come le componenti della matrice inversa della matrice $(e^\beta_b)$: cioè tali che

$$\theta^a_\sigma\, e^\sigma_b = \delta^a_b \qquad \text{e} \qquad e^\beta_k \theta^k_\alpha = \delta^\beta_\alpha$$

Una 1–forma $\underline{\boldsymbol{\omega}} \in \boldsymbol{\Omega}^1(L(M))$ avrà un'espressione del tipo

$$\underline{\boldsymbol{\omega}} \;=\; \omega_\beta(x,e) dx^\beta + \tilde{\omega}^k_\beta(x,e)\, de^\beta_k$$

$$= \omega_\beta(x,e)dx^\beta + \tilde{\omega}^k_\beta(x,e)\, e^\beta_i (\underline{\boldsymbol{\theta}}_L)^i_k$$
$$= \omega_\beta(x,e)dx^\beta + \tilde{\omega}^k_\beta(x,e)\, e^\alpha_k\, (\underline{\boldsymbol{\theta}}_R)^\beta_\alpha$$

dove abbiamo utilizzato 1–forme locali

$$(\underline{\boldsymbol{\theta}}_R)^\beta_\alpha = \theta^i_\alpha\, de^\beta_i \qquad (\underline{\boldsymbol{\theta}}_R = de \otimes e^{-1}) \tag{35}$$

e le 1–forme locali

$$(\underline{\boldsymbol{\theta}}_L)^i_k = \theta^i_\alpha\, de^\alpha_k \qquad (\underline{\boldsymbol{\theta}}_L = e^{-1} \otimes de)\,. \tag{36}$$

La 1–forma $\underline{\boldsymbol{\omega}}$ è invariante per le moltiplicazioni a destra $\bar{R}_g$ se e solo se

$$\underline{\boldsymbol{\omega}} = \omega_\beta(x)dx^\beta + \tilde{\omega}^\alpha_\beta(x)\, (\underline{\boldsymbol{\theta}}_R(e))^\beta_\alpha = \omega_\beta(x)dx^\beta + \tilde{\omega}^\alpha_\beta(x)\, \theta^i_\alpha\, de^\beta_i$$

#### 5.1.3 Connessioni principali sui fibrati principali

Una connessione su un fibrato principale $(P, M, \pi)$ con gruppo di struttura $G$ è una *connessione principale* se la distribuzione $H(P) = \cup_{p\in P} H_p(P)$ dei sottospazi orizzontali è invariante sotto l'azione di tutte le moltiplicazioni a destra $\bar{R}_g$

$$\forall g \in G \quad T(\bar{R}_g)(H(P)) = H(P) \qquad \Longleftrightarrow \qquad \forall g \in G, \forall p \in P \quad T(\bar{R}_g)(H_p(P)) = H_{p\cdot g}(P)$$

Usando una trivializzazione locale $\psi : \pi^{-1}(U) \longrightarrow U \times G$, campi di vettori $\vec{D}_\alpha = \partial_\alpha - \Gamma^i_\alpha(x, y)\partial_i \in H_p$, che sono una base per i vettori orizzontali in $H_p$ si possono sempre riscrivere come

$$\vec{D}_\alpha = \partial_\alpha - \tilde{\Gamma}^k_\alpha(x, g)\, \vec{\boldsymbol{\rho}}_k(g)$$

Affinché una connessione sia una connessione principale è necessario e sufficiente che per ogni $\gamma \in G$ deve essere $(\bar{R}_\gamma)_*(\vec{D}_\alpha) = \vec{D}_\alpha$ e, quindi, i coefficienti $\tilde{\Gamma}^i_\alpha(x, g)$ devono essere indipendenti dal punto $g \in G$. Cioè, deve essere

$$\vec{D}_\alpha = \partial_\alpha - A^k_\alpha(x)\, \vec{\boldsymbol{\rho}}_k(g)$$

I coefficienti $A^k_\alpha(x)$ sono le *componenti* della connessione principale (rispetto alla base locale $\vec{\boldsymbol{\rho}}_k(g)$ che dipende dalla trivializzazione $\psi$).

Per ogni campo di vettori $\vec{\xi} \in \mathfrak{X}(M)$ il sollevamento orizzontale $\vec{\xi}_H \in \mathfrak{X}_H(P)$ di $\vec{\xi}$ è il campo di vettori proiettabile

$$\xi^\mu(x)\, \vec{D}_\mu = \xi^\mu(x)\Big(\partial_\mu - A^k_\mu(x)\, \vec{\boldsymbol{\rho}}_k(g)\Big)$$

che è invariante per le moltiplicazioni a destra $\bar{R}_\gamma$. I coefficienti $A^k_\mu(x)$ non sono le componenti di un tensore, ma le differenze di connessioni principali sono 1–forme orizzontali a valori in $V(P)$. Cioè: le differenze di connessioni principali sono elementi di $\mathfrak{X}_V(P) \otimes \boldsymbol{\Omega}^1_H(P)$.

Il tensore di curvatura della connessione $A^i_\mu$ si ottiene calcolando i commutatori

$$\Big[\vec{D}_\mu, \vec{D}_\nu\Big] \;=\; \Big[\partial_\mu - A^i_\mu(x)\, \vec{\boldsymbol{\rho}}_i(g), \partial_\nu - A^j_\nu(x)\, \vec{\boldsymbol{\rho}}_j(g)\Big]$$

$$
\begin{aligned}
&= [\partial_\mu, \partial_\nu] - (\partial_\mu A^j_\nu(x))\, \vec{\boldsymbol{\rho}}_j(g) + (\partial_\nu A^i_\mu(x))\, \vec{\boldsymbol{\rho}}_i(g) + A^i_\mu(x)\, A^j_\nu(x)\ \left[\vec{\boldsymbol{\rho}}_i(g), \vec{\boldsymbol{\rho}}_j(g)\right] \\
&= -(\partial_\mu A^k_\nu(x) - \partial_\nu A^k_\mu(x))\vec{\boldsymbol{\rho}}_k(g) - A^i_\mu(x)\, A^j_\nu(x) c^k_{ij} \vec{\boldsymbol{\rho}}_k(g) \\
&= -\left(\partial_\mu A^k_\nu(x) - \partial_\nu A^k_\mu(x) + c^k_{ij} A^i_\mu(x)\, A^j_\nu(x)\right) \vec{\boldsymbol{\rho}}_k(g) \\
&= -F^k_{\mu\nu}(x)\, \vec{\boldsymbol{\rho}}_k(g)
\end{aligned}
$$

Il tensore di curvatura, che è anch'esso invariante per le moltiplicazioni a destra $\bar{R}_\gamma$, ha come componenti i coefficienti

$$F^k_{\mu\nu}(x) = \partial_\mu A^k_\nu(x) - \partial_\nu A^k_\mu(x) + c^k_{ij} A^i_\mu(x)\, A^j_\nu(x)$$

che sono le componenti di una 2–forma orizzontale a valori in $V(P)$. Cioè, si ha:

$$\underline{\boldsymbol{F}}(x, g) = \tfrac{1}{2} F^k_{\mu\nu}(x)\, dx^\mu \wedge dx^\nu \otimes \vec{\boldsymbol{\rho}}_k(g)$$

La base anolonoma $(\vec{D}_\mu, \vec{\boldsymbol{\rho}}_k(g))$ di $\mathfrak{X}(P)$ ha come base duale la base $(dx^\alpha, \underline{\boldsymbol{\omega}}^i)$ di $\boldsymbol{\Omega}^1(P)$ dove le 1–forme $\underline{\boldsymbol{\omega}}^i$ sono definite da

$$\underline{\boldsymbol{\omega}}^i = A^i_\alpha(x) dx^\alpha + \underline{\boldsymbol{\theta}}^i_R(g)$$

I differenziali $d\underline{\boldsymbol{\omega}}^i$ sono

$$
\begin{aligned}
d\underline{\boldsymbol{\omega}}^i &= dA^i_\alpha(x) \wedge dx^\alpha + d\underline{\boldsymbol{\theta}}^i_R(g) \\
&= \partial_\mu A^i_\nu(x) dx^\mu \wedge dx^\nu + \tfrac{1}{2} c^i_{rs}\, \underline{\boldsymbol{\theta}}^r_R(g) \wedge \underline{\boldsymbol{\theta}}^s_R(g) \\
&= \tfrac{1}{2}\Big(\partial_\mu A^i_\nu(x) - \partial_\nu A^i_\nu(x)\Big) dx^\mu \wedge dx^\nu + \tfrac{1}{2} c^i_{rs} \left(\underline{\boldsymbol{\omega}}^r - A^r_\mu(x) dx^\mu\right) \wedge \left(\underline{\boldsymbol{\omega}}^s - A^s_\nu(x) dx^\nu\right)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \tfrac{1}{2}\Big(\partial_\mu A^i_\nu(x) - \partial_\nu A^i_\mu(x) + c^i_{rs} A^r_\mu(x) A^s_\nu(x)\Big) dx^\mu \wedge dx^\nu \\
&\quad - c^i_{rs}\, \underline{\boldsymbol{\omega}}^r \wedge A^s_\nu(x) dx^\nu + \tfrac{1}{2} c^i_{rs}\, \underline{\boldsymbol{\omega}}^r \wedge \underline{\boldsymbol{\omega}}^s \\
&= \tfrac{1}{2} F^i_{\mu\nu}(x)\, dx^\mu \wedge dx^\nu - c^i_{rs}\, \underline{\boldsymbol{\omega}}^r \wedge A^s_\nu(x) dx^\nu + \tfrac{1}{2} c^i_{rs}\, \underline{\boldsymbol{\omega}}^r \wedge \underline{\boldsymbol{\omega}}^s
\end{aligned}
$$

La parte orizzontale dei differenziali $d\underline{\boldsymbol{\omega}}^i$ ci danno le 2–forme di curvatura

$$\underline{\boldsymbol{F}}^i(x) = \tfrac{1}{2} F^i_{\mu\nu}(x)\, dx^\mu \wedge dx^\nu$$

**Esempio 5.7.** [Connessioni principali sui fibrati $L(M)$]

Data una connessione lineare sul fibrato tangente $T(M)$ di una varietà $M$, i campi orizzontali definiti nel paragrafo 11.3 di [8] permettono di costruire un campo orizzontale sul fibrato $L(M)$. Lavorando con sistemi di coordinate fibrate naturali $(x^\alpha, e^\beta_k)$ su un aperto $(\lambda_M)^{-1}(U)$, la base $\vec{D}_\mu$ per i vettori orizzontali in un punto di coordinate $(x^\alpha, e^\beta_k)$ è definita da:

$$\vec{D}_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu} - \Gamma^\alpha{}_{\beta\mu}(x) e^\beta_k \frac{\partial}{\partial e^\alpha_k} = \vec{\partial}_\mu - \Gamma^\alpha{}_{\beta\mu}(x) \vec{\boldsymbol{\rho}}^\beta_\alpha(e) \tag{37}$$

Le 1–forme $\underline{\boldsymbol{\omega}}^\alpha_\beta$ della base duale sono, quindi, definite da

$$\underline{\boldsymbol{\omega}}^\alpha_\beta = \big(\underline{\boldsymbol{\theta}}_R(e)\big)^\alpha_\beta + \Gamma^\alpha{}_{\beta\mu}(x) dx^\mu = \theta^i_\beta\, de^\alpha_i + \Gamma^\alpha{}_{\beta\mu}(x) dx^\mu \tag{38}$$

Calcolando i commutatori $\Big[\vec{D}_\mu, \vec{D}_\nu\Big]$ si ottiene

$$\Big[\vec{D}_\mu, \vec{D}_\nu\Big] = -R^\alpha{}_{\beta\mu\nu}(x) \vec{\boldsymbol{\rho}}^\beta_\alpha(e) \tag{39}$$

mentre dai differenziali delle forme $\underline{\boldsymbol{\omega}}^{\alpha}_{\beta}$ si ottongono le 2–forme di curvatura

$$\underline{\boldsymbol{\Omega}}^{\alpha}_{\beta} = d\,\underline{\boldsymbol{\omega}}^{\alpha}_{\beta} + \underline{\boldsymbol{\omega}}^{\alpha}_{\sigma} \wedge \underline{\boldsymbol{\omega}}^{\sigma}_{\beta} = \frac{1}{2} R^{\alpha}{}_{\beta\mu\nu}(x)\, dx^{\mu} \wedge dx^{\nu} \tag{40}$$

## 6 Fibrati associati a fibrati principali

Dato un fibrato principale $(P, M, \pi, G)$ consideriamo un'azione a sinistra

$$\rho : G \times Y \longrightarrow Y$$

del gruppo di Lie $G$ su una varietà $Y$. Con l'azione $\rho$ possiamo definire un'azione a destra

$$\begin{array}{rccc} \tilde{\rho} : & (P \times Y) \times G & \longrightarrow & (P \times Y) \\ & ((p, y), g) & \longmapsto & (p \cdot g, \rho(g^{-1}, y)) \end{array}$$

sulla varietà prodotto $P \times Y$. L'azione a destra $\tilde{\rho}$ è libera ed ammette varietà quoziente

$$P \times_{\rho} Y := (P \times Y)/G$$

che ha una struttura naturale di fibrato su $M$ con fibra tipo $Y$. Il fibrato $P \times_{\rho} Y$ viene detto *fibrato associato* al fibrato principale $P$ attraverso l'azione $\tilde{\rho}$.

**Dimostrazione.**

Se consideriamo una trivializzazione locale $\psi : \pi^{-1}(U) \longrightarrow U \times G$

$$\begin{array}{rcccc} \psi & : & \pi^{-1}(U) & \longrightarrow & U \times G \\ & & p & \longmapsto & (\pi(p), \gamma) \end{array}$$

su di un aperto $U \subseteq M$, possiamo rappresentare l'azione $\tilde{\rho}$ come segue

$$\begin{array}{rcccc} \tilde{\rho} & : & ((U \times G) \times Y) \times G & \longrightarrow & (U \times G) \times Y \\ & & (((x, \gamma), y), g) & \longmapsto & ((x, \gamma \cdot g), \rho(g^{-1}, y)) \end{array}$$

Consideriamo ora la funzione $\tilde{\pi}_\rho : (U \times G) \times Y \longrightarrow U \times Y$ definita da

$$\tilde{\pi}_\rho : ((x, \gamma), y) \longmapsto (x, \tilde{y} = \rho(\gamma, y))$$

La funzione $\tilde{\pi}_\rho$, che è suriettiva con mappa tangente suriettiva, è manifestamente costante sulle orbite dell'azione $\tilde{\rho}$ che coincidono con le fibre della proiezione $\tilde{\pi}_\rho$. Inoltre, le coppie $(x, \tilde{y})$ costituiscono una trivializzazione locale del fibrato $\pi_\rho : P \times_\rho Y \longrightarrow M$.

■

**Esempio 6.1.** [fibrato banale]

Se l'azione a sinistra $\rho : G \times Y \longrightarrow Y$ è l'azione banale $\rho : (g, y) \longmapsto y$ allora il fibrato $\pi_\rho : P \times_\rho Y \longrightarrow M$ è il fibrato banale $\mathrm{pr}_1 : M \times Y \longrightarrow M$.

**Esempio 6.2.** [fibrato vettoriale]

Se la varietà $Y$ è uno spazio vettoriale di dimensione finita e l'azione a sinistra $\rho : G \times Y \longrightarrow Y$ è una rappresentazione lineare allora il fibrato $\pi_\rho : P \times_\rho Y \longrightarrow M$ ha una struttura naturale di fibrato vettoriale su $M$.

**Esempio 6.3.** [fibrato affine]

Se la varietà $Y$ è uno spazio affine di dimensione finita e l'azione a sinistra $\rho : G \times Y \longrightarrow Y$ è una rappresentazione affine allora il fibrato $\pi_\rho : P \times_\rho Y \longrightarrow M$ ha una struttura naturale di fibrato affine su $M$.

**Esempio 6.4.** [fibrato principale]

Se $Y = G$ e l'azione a sinistra $\rho : G \times Y \longrightarrow Y$ è la moltiplicazione a sinistra allora il fibrato $\pi_\rho : P \times_\rho Y \longrightarrow M$ ha una struttura naturale di fibrato principale su $M$ che è isomorfa a quella del fibrato principale $P$.

**Esempio 6.5.** [fibrato di gruppi di Lie]

Se $Y = G$ e l'azione a sinistra $\rho : G \times Y \longrightarrow Y$ è la rappresentazione aggiunta $\rho : (g, y) \longmapsto \mathrm{Ad}_g(y)$ allora le fibre del fibrato $\pi_\rho : P \times_\rho Y \longrightarrow M$ hanno una struttura naturale di gruppo di Lie isomorfa a quella di $G$ e si ha una struttura di fibrato di gruppi di Lie su $M$.

**Esempio 6.6.** [fibrato di algebre di Lie]

Se $Y = \mathfrak{g}$ e l'azione a sinistra $\rho : G \times Y \longrightarrow Y$ è la rappresentazione aggiunta $\rho : (g, y) \longmapsto \mathrm{ad}_g(y)$ allora le fibre del fibrato $\pi_\rho : P \times_\rho Y \longrightarrow M$ hanno una struttura naturale di algebra di Lie isomorfa a quella dell'algebra di Lie $\mathfrak{g}$ di $G$ e si ha una struttura di fibrato di algebre di Lie su $M$.

**FINE LEZIONE 17 MMdFC (2023-04-26 ore 16:00 – 18:00)**

## Riferimenti bibliografici

[1] S. Kobayashi, K. Nomizu: *Foundations of Differential Geometry, Vol. I*; John Wiley & Sons, New York · Chichester · Brisbane · Toronto · Singapore, 1963.

[2] S. Kobayashi, K. Nomizu: *Foundations of Differential Geometry, Vol. II*; John Wiley & Sons, New York · Chichester · Brisbane · Toronto, 1969.

[3] J. Dieudonné: *Éléments d'analyse 1 / Fondements de l'analyse moderne*; Gauthier–Villars, Paris, 1969.

[4] J. Dieudonné: *Éléments d'analyse 3*; Gauthier–Villars, Paris, 1969.

[5] J. E. Marsden, T. Ratiu, R. Abraham: *Manifolds, tensor analysis and applications, Third Edition*; Springer–Verlag, 2001.

[6] M. Ferraris: *Appunti di algebra lineare, multilineare e tensori*; 2023.

[7] M. Ferraris: *Appunti di calcolo differenziale*; 2023.

[8] M. Ferraris: *Varietà differenziabili*; 2023.