Appunti sulle equazioni di Maxwell

Marco FERRARIS

Dipartimento di Matematica “Giuseppe Peano”
Università degli Studi di Torino

2023

Sommario

In queste dispense ricapitoleremo alcune cose note sulle equazioni di Maxwell dal punto di vista classico e relativistico. Come sistema di unità di misura utilizzeremo sempre il sistema ISO.

. . . .

1 Formalismo vettoriale tridimensionale

Il campo elettromagnetico è descritto da alcuni oggetti che sono rappresentabili con con campi di vettori tangenti ad uno spazio affine tridimensionale euclideo (possiamo supporre che sia $\mathbb{R}^3$) che possono dipendere anche dal tempo t. Questi campi di vettori saranno, quindi, funzioni $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3$

1.1 Campo elettrico e induzione magnetica

I primi due campi di vettori sono il *campo elettrico* $\vec{\boldsymbol{E}} = E^k\,\vec{\partial}_k$ e l'*induzione magnetica* $\vec{\boldsymbol{B}} = B^k\,\vec{\partial}_k$. Questi due campi sono legati dalle equazioni di Maxwell

$$\begin{aligned} \operatorname{div}\vec{\boldsymbol{B}} &= 0 \qquad \text{(legge di Gauss)} && (1)\\ \operatorname{rot}\vec{\boldsymbol{E}} + \partial_t\vec{\boldsymbol{B}} &= \vec{\mathbf{0}} \qquad \text{(legge di Faraday)} && (2) \end{aligned}$$

L'equazione (1) si può risolvere dicendo che esiste un campo di vettori $\vec{\boldsymbol{A}} = A^k\,\vec{\partial}_k$, detto *potenziale vettore* del campo elettromagnetico, tale che sia

$$\vec{\boldsymbol{B}} = \operatorname{rot}\vec{\boldsymbol{A}} \tag{3}$$

In generale, il campo di vettori $\vec{\boldsymbol{A}}$ è definito solo localmente e non è detto che possa essere definito globalmente nella regione dove stiamo considerando il campo elettromagnetico.

Sostituendo l'equazione (3) nella (2) si ottiene l'equazione

$$\operatorname{rot}\vec{\boldsymbol{E}} + \partial_t(\operatorname{rot}\vec{\boldsymbol{A}}) = \operatorname{rot}\left(\vec{\boldsymbol{E}} + \partial_t\,\vec{\boldsymbol{A}}\right) = \vec{\mathbf{0}} \tag{4}$$

L'equazione (4) si può risolvere (localmente) dicendo che esiste una funzione φ tale che

$$\vec{\boldsymbol{E}} + \partial_t\,\vec{\boldsymbol{A}} = -\operatorname{grad}\varphi$$

La funzione φ è il *potenziale scalare* del campo elettromagnetico.

Riassumendo, si ha (localmente)

$$\vec{\boldsymbol{E}} = -\mathrm{grad}\,\varphi - \partial_t \vec{\boldsymbol{A}} \tag{5}$$

$$\vec{\boldsymbol{B}} = \mathrm{rot}\,\vec{\boldsymbol{A}} \tag{6}$$

I due potenziali φ e $\vec{\boldsymbol{A}}$ non sono determinati in maniera unica, ma possono essere modificati da una trasformazione di gauge

$$(\vec{\boldsymbol{A}}, \varphi) \longmapsto (\vec{\boldsymbol{A}}', \varphi') = (\vec{\boldsymbol{A}} + \mathrm{grad}\,\Lambda, \varphi - \partial_t\,\Lambda)\,, \tag{7}$$

dove Λ è una funzione arbitraria di t e del punto, senza che i campi $\vec{\boldsymbol{E}}$ e $\vec{\boldsymbol{B}}$ siano modificati.

I due campi di vettori $\vec{\boldsymbol{E}}$ e $\vec{\boldsymbol{B}}$ entrano nelle equazioni del moto di una particella carica, di carica q, attraverso la *forza di Lorentz*

$$\vec{\boldsymbol{F}} = q\left(\vec{\boldsymbol{E}} + \vec{\boldsymbol{v}} \times \vec{\boldsymbol{B}}\right) \tag{8}$$

Si può verificare facilmente che, in Relatività ristretta, le equazioni del moto di una particella, di massa di riposo m e carica q, sono

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{mc\vec{\boldsymbol{v}}}{\sqrt{c^2 - \vec{\boldsymbol{v}}\cdot\vec{\boldsymbol{v}}}}\right) = q\left(\vec{\boldsymbol{E}} + \vec{\boldsymbol{v}} \times \vec{\boldsymbol{B}}\right) \tag{9}$$

e si possono dedurre dalla seguente lagrangiana

$$L = -mc\sqrt{c^2 - \vec{\boldsymbol{v}}\cdot\vec{\boldsymbol{v}}} + q\left(-\varphi + \vec{\boldsymbol{v}}\cdot\vec{\boldsymbol{A}}\right) \tag{10}$$

Applicando una trasformazione di gauge (7) ai potenziali che compaiono nella lagrangiana (10) otteniamo

$$L' = L + \partial_t \Lambda + \vec{\boldsymbol{v}} \cdot \operatorname{grad} \Lambda = L + d_t \Lambda \tag{11}$$

e, come deve essere, le equazioni di Eulero–Lagrange non cambiano.

1.2 Campo magnetico e spostamento elettrico

L'altra coppia di campi di vettori che compaiono nella descrizione del campo elettromagnetico sono lo *spostamento elettrico* $\vec{\boldsymbol{D}} = D^k \vec{\partial}_k$ ed il *campo magnetico* $\vec{\boldsymbol{H}} = H^k \vec{\partial}_k$. Questi due campi sono legati dalle equazioni di Maxwell

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \vec{\boldsymbol{D}} &= \boldsymbol{\rho} \qquad \text{(legge di Gauss)} && (12)\\ \operatorname{rot} \vec{\boldsymbol{H}} - \partial_t \vec{\boldsymbol{D}} &= \vec{\boldsymbol{\jmath}} \qquad \text{(legge di Ampère–Maxwell)} && (13)\end{aligned}$$

che coinvolgono la *densità di carica* $\boldsymbol{\rho}$ e la *densità di corrente* $\vec{\boldsymbol{\jmath}} = j^k \vec{\partial}_k$ della materia che genera il campo elettromagnetico. La densità di carica e la densità di corrente devono soddisfare la *legge di conservazione della carica*

$$\partial_t \boldsymbol{\rho} + \operatorname{div} \vec{\boldsymbol{\jmath}} = \mathbf{0} \tag{14}$$

perché altrimenti le equazioni di Maxwell (12) e (13) non ammettono soluzioni.

1.3 Relazioni costitutive

Nel caso dell'elettrodinamica lineare classica, i due campi $\vec{\boldsymbol{D}}$ e $\vec{\boldsymbol{H}}$ sono collegati ai due campi $\vec{\boldsymbol{E}}$ e $\vec{\boldsymbol{B}}$ da relazioni costitutive che, nel caso di mezzi omogenei e isotropi, sono del tipo

$$\vec{\boldsymbol{D}} = \varepsilon\, \vec{\boldsymbol{E}} \tag{15}$$

$$\vec{\boldsymbol{H}} = \mu^{-1}\, \vec{\boldsymbol{B}} \tag{16}$$

dove ε è la *costante dielettrica* del corpo, mentre μ è la *permeabilità magnetica* del corpo. I loro valori nel vuoto sono indicati con ε_0 e μ_0 e soddisfano all'identità $\varepsilon_0\, \mu_0 = 1/c^2$, dove c è la velocità della luce nel vuoto.

Osservazione 1.1. Se il corpo non è omogeneo i coefficienti ε e μ non sono più costanti, ma possono dipendere dal punto, dal tempo, dalla temperatura del corpo, ...

Osservazione 1.2. Se il corpo è omogeneo ma non isotropo, allora i coefficienti ε e μ vengono sostituiti da due tensori doppi $\boldsymbol{\varepsilon}$ e $\boldsymbol{\mu}$ che sono "simmetrici" rispetto alla metrica euclidea di $\mathbb{R}^3$ nel senso che

$$\boldsymbol{\varepsilon}(\vec{X}) \cdot \vec{Y} = \vec{X} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}(\vec{Y}) \quad \text{e} \quad \boldsymbol{\mu}(\vec{X}) \cdot \vec{Y} = \vec{X} \cdot \boldsymbol{\mu}(\vec{Y}) \qquad \forall \vec{X}, \vec{Y} : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

1.4 Equazioni del campo elettromagnetico

Sostituendo la (5) dentro la (15) e la (6) dentro la (16), le equazioni (12) e (13) si possono riscrivere come segue

$$\begin{aligned} \operatorname{div}\left(\varepsilon\left(-\operatorname{grad}\varphi-\partial_t\vec{\boldsymbol{A}}\right)\right) &= \boldsymbol{\rho} && (17)\\ \operatorname{rot}\left(\mu^{-1}\operatorname{rot}(\vec{\boldsymbol{A}})\right)-\partial_t\left(\varepsilon(-\operatorname{grad}\varphi-\partial_t\vec{\boldsymbol{A}})\right) &= \vec{\boldsymbol{\jmath}} && (18)\end{aligned}$$

che, nel caso omogeneo ed isotropo, diventano

$$\begin{aligned} \mu^{-1}\operatorname{rot}\left(\operatorname{rot}(\vec{\boldsymbol{A}})\right)+\varepsilon\,\partial_t\left(\operatorname{grad}\varphi+\partial_t\vec{\boldsymbol{A}}\right) &= \vec{\boldsymbol{\jmath}} && (19)\\ \operatorname{grad}\left(\operatorname{div}(\vec{\boldsymbol{A}})\right)-\Delta(\vec{\boldsymbol{A}})+\operatorname{grad}\left(\mu\,\varepsilon\,\partial_t(\varphi)\right)+\mu\,\varepsilon\,\partial_t^2(\vec{\boldsymbol{A}}) &= \mu\,\vec{\boldsymbol{\jmath}} && (20)\\ \operatorname{grad}\left(\operatorname{div}(\vec{\boldsymbol{A}})+\mu\,\varepsilon\,\partial_t(\varphi)\right)-\Delta(\vec{\boldsymbol{A}})+\mu\,\varepsilon\,\partial_t^2\vec{\boldsymbol{A}} &= \mu\,\vec{\boldsymbol{\jmath}} && (21)\\ \operatorname{grad}\left(\operatorname{div}(\vec{\boldsymbol{A}})+\frac{1}{c^2}\,\partial_t(\varphi)\right)-\Delta(\vec{\boldsymbol{A}})+\frac{1}{c^2}\,\partial_t^2\vec{\boldsymbol{A}} &= \mu\,\vec{\boldsymbol{\jmath}} && (22)\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \varepsilon\operatorname{div}((-\operatorname{grad}\varphi-\partial_t\vec{\boldsymbol{A}})) &= \boldsymbol{\rho} && (23)\\ -\Delta\,\varphi-\partial_t\operatorname{div}(\vec{\boldsymbol{A}}) &= \boldsymbol{\rho}/\varepsilon && (24)\\ -\Delta\,\varphi+\frac{1}{c^2}\,\partial_t^2(\varphi)-\partial_t\left(\operatorname{div}(\vec{\boldsymbol{A}})+\frac{1}{c^2}\,\partial_t(\varphi)\right) &= \boldsymbol{\rho}/\varepsilon && (25)\end{aligned}$$

Dove la costante $c = 1/\sqrt{\varepsilon\,\mu}$ è la velocità della luce nel mezzo. Con una trasformazione di gauge (7) si può scegliere la funzione Λ in modo tale che le soluzioni soddisfino alla condizione di *gauge di Lorentz*

$$\mathrm{div}(\vec{\boldsymbol{A}}) + \frac{1}{c^2}\,\partial_t(\varphi) = 0\,. \tag{26}$$

Quindi, le equazioni (25) e (22) diventano

$$\begin{aligned} \Delta\,\varphi - \frac{1}{c^2}\,\partial_t^2(\varphi) &= -\boldsymbol{\rho}/\varepsilon & (27)\\ \Delta(\vec{\boldsymbol{A}}) - \frac{1}{c^2}\,\partial_t^2\vec{\boldsymbol{A}} &= -\mu\,\vec{\boldsymbol{\jmath}} & (28) \end{aligned}$$

Le equazioni (27) e (28) si possono risolvere fornendo i noti potenziali ritardati di Liénard–Wichert

$$\begin{aligned} \varphi(\vec{\boldsymbol{x}},t) &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\iiint \frac{\rho\big(\vec{\boldsymbol{y}},T(t,\vec{\boldsymbol{x}},\vec{\boldsymbol{y}})\big)}{R(\vec{\boldsymbol{x}},\vec{\boldsymbol{y}})}d^3y & (29)\\ \vec{\boldsymbol{A}}(\vec{\boldsymbol{x}},t) &= \frac{\mu_0}{4\pi}\iiint \frac{\vec{\boldsymbol{\jmath}}\big(\vec{\boldsymbol{y}},T(t,\vec{\boldsymbol{x}},\vec{\boldsymbol{y}})\big)}{R(\vec{\boldsymbol{x}},\vec{\boldsymbol{y}})}d^3y & (30) \end{aligned}$$

dove si è posto

$$\begin{aligned} R(\vec{\boldsymbol{x}},\vec{\boldsymbol{y}}) &= \|\vec{\boldsymbol{x}}-\vec{\boldsymbol{y}}\| & (31)\\ T(t,\vec{\boldsymbol{x}},\vec{\boldsymbol{y}}) &= t - \frac{R(\vec{\boldsymbol{x}},\vec{\boldsymbol{y}})}{c} & (32)\\ d^3y &= dy^1\wedge dy^2\wedge dy^3 & (33) \end{aligned}$$

1.5 Principio variazionale per le equazioni del campo elettromagnetico

Le equazioni di Maxwell (17) e (18) si possone dedurre da un principio variazionale basato su una lagrangiana del tipo

$$L = -\boldsymbol{\rho}\,\varphi + \vec{\boldsymbol{\jmath}} \cdot \vec{\boldsymbol{A}} + \frac{1}{2}\left[\vec{\boldsymbol{E}} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}(\vec{\boldsymbol{E}}) - \vec{\boldsymbol{B}} \cdot \boldsymbol{\mu}^{-1}(\vec{\boldsymbol{B}})\right] \tag{34}$$

dove bisogna inserire le espressioni (5) e (6) per i campi $\vec{\boldsymbol{E}}$ e $\vec{\boldsymbol{B}}$.

Dimostrazione.

Nell'ipotesi che le quantità $\boldsymbol{\rho}$, $\vec{\boldsymbol{\jmath}}$, $\boldsymbol{\varepsilon}$ e $\boldsymbol{\mu}$ siano assegnate, la variazione della lagrangiana (34) è

$$\begin{aligned}
\delta\, L &= -\boldsymbol{\rho}\,\delta\,\varphi + \vec{\boldsymbol{\jmath}} \cdot \delta\,\vec{\boldsymbol{A}} + \boldsymbol{\varepsilon}(\vec{\boldsymbol{E}}) \cdot \delta\,\vec{\boldsymbol{E}} - \boldsymbol{\mu}^{-1}(\vec{\boldsymbol{B}}) \cdot \delta\,\vec{\boldsymbol{B}} \\
&= -\boldsymbol{\rho}\,\delta\,\varphi + \vec{\boldsymbol{\jmath}} \cdot \delta\,\vec{\boldsymbol{A}} + \vec{\boldsymbol{D}} \cdot \delta\,\vec{\boldsymbol{E}} - \vec{\boldsymbol{H}} \cdot \delta\,\vec{\boldsymbol{B}} \\
&= -\boldsymbol{\rho}\,\delta\,\varphi + \vec{\boldsymbol{\jmath}} \cdot \delta\,\vec{\boldsymbol{A}} + \vec{\boldsymbol{D}} \cdot \delta\,(-\mathrm{grad}\,\varphi - \partial_t\vec{\boldsymbol{A}}) - \vec{\boldsymbol{H}} \cdot \delta\,(\mathrm{rot}\,\vec{\boldsymbol{A}}) \\
&= -\boldsymbol{\rho}\,\delta\,\varphi + \vec{\boldsymbol{\jmath}} \cdot \delta\,\vec{\boldsymbol{A}} + \vec{\boldsymbol{D}} \cdot (-\mathrm{grad}\,\delta\,\varphi - \partial_t\delta\,\vec{\boldsymbol{A}}) - \vec{\boldsymbol{H}} \cdot (\mathrm{rot}\,\delta\,\vec{\boldsymbol{A}}) \\
&= -\boldsymbol{\rho}\,\delta\,\varphi + \vec{\boldsymbol{\jmath}} \cdot \delta\,\vec{\boldsymbol{A}} - \vec{\boldsymbol{D}} \cdot (\mathrm{grad}\,\delta\,\varphi) - \vec{\boldsymbol{D}} \cdot (\partial_t\delta\,\vec{\boldsymbol{A}}) - \vec{\boldsymbol{H}} \cdot (\mathrm{rot}\,\delta\,\vec{\boldsymbol{A}}) \\
&= -\boldsymbol{\rho}\,\delta\,\varphi + \vec{\boldsymbol{\jmath}} \cdot \delta\,\vec{\boldsymbol{A}} - \mathrm{div}(\vec{\boldsymbol{D}}\,\delta\,\varphi) + \mathrm{div}(\vec{\boldsymbol{D}})\,\delta\,\varphi - \partial_t(\vec{\boldsymbol{D}} \cdot \delta\,\vec{\boldsymbol{A}}) + (\partial_t\vec{\boldsymbol{D}}) \cdot \delta\,\vec{\boldsymbol{A}} + \mathrm{div}(\vec{\boldsymbol{H}} \times \delta\,\vec{\boldsymbol{A}}) - (\mathrm{rot}\vec{\boldsymbol{H}}) \cdot \delta\,\vec{\boldsymbol{A}} \\
&= \left(\mathrm{div}(\vec{\boldsymbol{D}}) - \boldsymbol{\rho}\right)\,\delta\,\varphi + \left(\vec{\boldsymbol{\jmath}} + \partial_t\vec{\boldsymbol{D}} - \mathrm{rot}\vec{\boldsymbol{H}}\right) \cdot \delta\,\vec{\boldsymbol{A}} + \mathrm{div}\left(\vec{\boldsymbol{H}} \times \delta\,\vec{\boldsymbol{A}} + \vec{\boldsymbol{D}}\,\delta\,\varphi\right) - \partial_t\left(\vec{\boldsymbol{D}} \cdot \delta\,\vec{\boldsymbol{A}}\right)
\end{aligned}$$

Integrando la 4–forma $\delta\,L\,dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 \wedge dt$ su una regione del tipo $\Omega \times [t_1, t_2] \subset \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}$, con la richiesta che $\delta\,\vec{\boldsymbol{A}}$ e $\delta\,\varphi$ siano arbitrari ma che si annullino sulla frontiera di $\Omega \times [t_1, t_2]$, si ottiene il risultato.

$\blacksquare$

FINE LEZIONE 22 MMdFC (2023-05-18 ore 11:00 – 13:00)

1.6 Descrizione del campo elettromagnetico con forme differenziali tridimensionali

Prima di proseguire osserviamo che su una varietà riemanniana tridimensionale $(\boldsymbol{M}_3, g)$ ad ogni campo di vettori $\vec{X} \in \mathfrak{X}(\boldsymbol{M}_3)$ corrisponde ad un'unica 1-forma $(\vec{X})^\flat \in \boldsymbol{\Omega}^1(\boldsymbol{M}_3)$ e, se la varietà è orientata, alla 1-forma $(\vec{X})^\flat$ corrisponde una 2–forma $*((\vec{X})^\flat) = \vec{X} \lrcorner\, \underline{\boldsymbol{\omega}}_g \in \boldsymbol{\Omega}^2(\boldsymbol{M}_3)$.

Indipendentemente dalla dimensione della varietà riemanniana (M, g), la divergenza $\operatorname{div}(\vec{X})$ di un campo di vettori $\vec{X}$ è sempre definita dalla formula

$$\operatorname{div}(\vec{X})\, \underline{\boldsymbol{\omega}}_g = d\left(\vec{X} \lrcorner\, \underline{\boldsymbol{\omega}}_g\right) = d\left(*\left((\vec{X})^\flat\right)\right) \tag{35}$$

ed il gradiente $\operatorname{grad}(f)$ di una funzione scalare $f \in \mathfrak{F}(M)$ è sempre il campo di vettori definito da

$$\operatorname{grad}(f) = (d\, f)^\sharp\ . \tag{36}$$

Il rotore $\operatorname{rot}(\vec{X})$, che è definito[1] solo in dimensione 3, è il campo di vettori definito dalla formula

$$\operatorname{rot}(\vec{X}) = \left(*\left(d\left((\vec{X})^\flat\right)\right)\right)^\sharp \tag{37}$$

La legge di Gauss (1) e la legge di Faraday (2) possono essere riscritte nel seguente modo[2]

$$d\, \underline{\boldsymbol{B}} = \underline{\boldsymbol{0}} \qquad \text{(legge di Gauss)} \tag{38}$$

$$d\, \underline{\boldsymbol{E}} + \partial_t\, \underline{\boldsymbol{B}} = \underline{\boldsymbol{0}} \qquad \text{(legge di Faraday)} \tag{39}$$

[1] A dire la verità il rotore $\operatorname{rot}(\vec{X})$ si può definire anche in dimensione 2 ma, in questo caso, è uno scalare e non un campo di vettori.

[2] Nel resto di questo paragrafo il differenziale d di oggetti che sono funzioni del punto $p \in \boldsymbol{M}$ e del tempo t sarà calcolato come se il tempo t fosse una costante. Quindi, $d\, f(x^i, t) := dx^k \wedge \partial_k\, f$

dove la 1–forma $\underline{\boldsymbol{E}}$ e la 2–forma $\underline{\boldsymbol{B}}$ sono definite da

$$\underline{\boldsymbol{E}} = (\vec{\boldsymbol{E}})^\flat \qquad , \qquad \underline{\boldsymbol{B}} = *\left(\vec{\boldsymbol{B}}^\flat\right) = \vec{\boldsymbol{B}} \rfloor \underline{\boldsymbol{\omega}}_g \tag{40}$$

Ovviamente, dalle equazioni (38) e (39) si deduce che localmente esistono una 1–forma $\underline{\boldsymbol{A}} = \vec{\boldsymbol{A}}^\flat$ ed un campo scalare φ tali che

$$\underline{\boldsymbol{E}} = -d\,\varphi - \partial_t\,\underline{\boldsymbol{A}} \tag{41}$$

$$\underline{\boldsymbol{B}} = d\,\underline{\boldsymbol{A}} \tag{42}$$

La 1–forma $\underline{\boldsymbol{A}}$ ed il campo scalare φ possono essere modificati da una trasformazione di gauge

$$(\underline{\boldsymbol{A}}, \varphi) \longmapsto (\underline{\boldsymbol{A}}', \varphi') = (\underline{\boldsymbol{A}} + d\,\Lambda, \varphi - \partial_t\,\Lambda)\,, \tag{43}$$

dove $\Lambda(x^i, t)$ è una funzione arbitraria, senza modificare i campi $\underline{\boldsymbol{E}}$ e $\underline{\boldsymbol{B}}$.

Con un procedimento analogo, possiamo riscrivere le equazioni (12) e (13) nel seguente modo

$$d\,\underline{\boldsymbol{D}} = \underline{\boldsymbol{\rho}} \qquad \text{(legge di Gauss)} \tag{44}$$

$$d\,\underline{\boldsymbol{H}} - \partial_t\,\underline{\boldsymbol{D}} = \underline{\boldsymbol{j}} \qquad \text{(legge di Ampère–Maxwell)} \tag{45}$$

dove la 1–forma $\underline{\boldsymbol{H}}$ e la 2–forma $\underline{\boldsymbol{D}}$ sono definite da

$$\underline{\boldsymbol{H}} = (\vec{\boldsymbol{H}})^\flat \qquad , \qquad \underline{\boldsymbol{D}} = *\left(\vec{\boldsymbol{D}}^\flat\right) = \vec{\boldsymbol{D}} \rfloor \underline{\boldsymbol{\omega}}_g \tag{46}$$

mentre la 3-forma $\underline{\boldsymbol{\rho}}$ e la 2–forma $\underline{\boldsymbol{j}}$ sono definite da

$$\underline{\boldsymbol{\rho}} = *\boldsymbol{\rho} = \boldsymbol{\rho}\,\underline{\boldsymbol{\omega}}_g \qquad , \qquad \underline{\boldsymbol{j}} = *\left(\vec{\boldsymbol{j}}^{\flat}\right) = \vec{\boldsymbol{j}} \lrcorner\, \underline{\boldsymbol{\omega}}_g \tag{47}$$

Dalle equazioni (44) e (45) si deduce che deve valere l'identità di conservazione della carica

$$d\,\underline{\boldsymbol{j}} + \partial_t\,\underline{\boldsymbol{\rho}} = 0 \tag{48}$$

perché altrimenti le equazioni non ammettono soluzioni.

Nel caso di mezzi omogenei ed isotropi, le relazioni costitutive diventano

$$\underline{\boldsymbol{D}} \;=\; \varepsilon * \underline{\boldsymbol{E}} \tag{49}$$

$$\underline{\boldsymbol{H}} \;=\; \mu^{-1} * \underline{\boldsymbol{B}} \tag{50}$$

e la lagrangiana L definita dalla formula (34) può essere riscritta più compattamente come una 3–forma

$$\underline{\boldsymbol{L}} = -\underline{\boldsymbol{\rho}} \wedge \varphi + \underline{\boldsymbol{j}} \wedge \underline{\boldsymbol{A}} + \frac{1}{2}\left[\varepsilon\,\underline{\boldsymbol{E}} \wedge *\underline{\boldsymbol{E}} - \mu^{-1}\underline{\boldsymbol{B}} \wedge *\underline{\boldsymbol{B}}\right] \tag{51}$$

la cui variazione è più facile da calcolare di quella della lagrangiana (34).

1.7 Descrizione del campo elettromagnetico con forme differenziali quadridimensionali

Se passiamo a rappresentare gli oggetti precedenti sullo spazio di Minkowski $\boldsymbol{M}_4 = \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}$ con una metrica del tipo $(g_{\alpha\beta}) = \mathrm{diag}(1, 1, 1, -c^2)$, oppure $(g_{\alpha\beta}) = \mathrm{diag}(-1, -1, -1, c^2)$, le coppie $(\underline{\boldsymbol{E}}, \underline{\boldsymbol{B}})$ e

$(\underline{\boldsymbol{H}}, \underline{\boldsymbol{D}})$ permettono di definire due 2–forme $\underline{\mathbf{F}}, \underline{\mathbf{G}} \in \boldsymbol{\Omega}^2(\boldsymbol{M}_4)$ che permettono di riscrive le equazioni di Maxwell in modo particolarmente semplice:

$$\underline{\mathbf{F}} = \pm\Big(\underline{\boldsymbol{E}} \wedge \underline{\mathbf{d}}\, t + \underline{\boldsymbol{B}}\Big) \tag{52}$$

e

$$\underline{\mathbf{G}} = \pm\Big(\underline{\boldsymbol{H}} \wedge \underline{\mathbf{d}}\, t - \underline{\boldsymbol{D}}\Big) \tag{53}$$

Il segno $+$ è da scegliere nel caso della metrica $(g_{\alpha\beta}) = \mathrm{diag}(1,1,1,-c^2)$, mentre il segno $-$ è da scegliere quando la metrica è $(g_{\alpha\beta}) = \mathrm{diag}(-1,-1,-1,c^2)$

Calcolando il differenziale esterno della 2–forma $\underline{\mathbf{F}}$ si ottiene

$$\begin{aligned} \underline{\mathbf{d}}\, \underline{\mathbf{F}} &= \pm\Big(d\,\underline{\boldsymbol{E}} \wedge \underline{\mathbf{d}}\, t + \underline{\mathbf{d}}\, t \wedge \partial_t\, \underline{\boldsymbol{B}} + d\,\underline{\boldsymbol{B}}\Big) \\ &= \pm\Big(\,(d\,\underline{\boldsymbol{E}} + \partial_t\,\underline{\boldsymbol{B}}) \wedge \underline{\mathbf{d}}\, t + d\,\underline{\boldsymbol{B}}\Big) \\ &= \pm\Big(\underline{\mathbf{d}}\, t \wedge (d\,\underline{\boldsymbol{E}} + \partial_t\,\underline{\boldsymbol{B}}) + d\,\underline{\boldsymbol{B}}\Big) \\ &= \underline{\mathbf{0}} \end{aligned} \tag{54}$$

Localmente si può riscrivere la 2–forma $\underline{\mathbf{F}}$ come il differenziale esterno $\underline{\mathbf{F}} = \underline{\mathbf{d}}\,\underline{\mathbf{A}}$ dove la 1–forma $\underline{\mathbf{A}} \in \boldsymbol{\Omega}^1(\boldsymbol{M}_4)$ è definita da

$$\underline{\mathbf{A}} = \pm\Big(-\varphi\,\underline{\mathbf{d}}\, t + \underline{\boldsymbol{A}}\Big) \tag{55}$$

Calcolando il differenziale esterno della 2–forma $\underline{\mathbf{G}}$ si ottiene

$$\begin{aligned} \underline{\mathbf{d}}\,\underline{\mathbf{G}} &= \pm\Big(d\,\underline{\boldsymbol{H}} \wedge \underline{\mathbf{d}}\,t - \underline{\mathbf{d}}\,t \wedge \partial_t\,\underline{\boldsymbol{D}} - d\,\underline{\boldsymbol{D}}\Big) \\ &= \pm\Big(\underline{\mathbf{d}}\,t \wedge (d\,\underline{\boldsymbol{H}} - \partial_t\,\underline{\boldsymbol{D}}) - d\,\underline{\boldsymbol{D}}\Big) \\ &= \underline{\mathbf{J}} \end{aligned} \tag{56}$$

dove la 3–forma $\underline{\mathbf{J}} \in \boldsymbol{\Omega}^3(\boldsymbol{M}_4)$ è definita da

$$\underline{\mathbf{J}} = \pm\Big(\underline{\boldsymbol{j}} \wedge \underline{\mathbf{d}}\,t - \underline{\boldsymbol{\rho}}\Big) \tag{57}$$

Ovviamente si deve avere

$$\underline{\mathbf{d}}\,\underline{\mathbf{J}} = \underline{\mathbf{d}}\,\underline{\mathbf{d}}\,\underline{\mathbf{G}} = \underline{\mathbf{0}} \tag{58}$$

con

$$\underline{\mathbf{d}}\,\underline{\mathbf{J}} = \pm\underline{\mathbf{d}}\,\Big(\underline{\boldsymbol{j}} \wedge \underline{\mathbf{d}}\,t - \underline{\boldsymbol{\rho}}\Big) = \pm\Big(d\,\underline{\boldsymbol{j}} \wedge \underline{\mathbf{d}}\,t - \underline{\mathbf{d}}\,t \wedge \partial_t\,\underline{\boldsymbol{\rho}}\Big) = \pm\Big(d\,\underline{\boldsymbol{j}} + \partial_t\,\underline{\boldsymbol{\rho}}\Big) \wedge \underline{\mathbf{d}}\,t \tag{59}$$

Il duale di Hodge della 2–forma $\underline{\mathbf{F}}$ è

$$\boldsymbol{*}\,\underline{\mathbf{F}} = \pm\Big(c\,*\underline{\boldsymbol{B}} \wedge \underline{\mathbf{d}}\,t - \frac{1}{c}\,*\underline{\boldsymbol{E}}\Big) \tag{60}$$

da cui, moltiplicando per $\varepsilon\,c = (\mu\,c)^{-1}$, si ottiene la 2–forma $\underline{\mathbf{G}}$.

La 3–forma $\underline{\mathbf{J}} \in \boldsymbol{\Omega}^3(\boldsymbol{M}_4)$ si può ottenere come il duale di Hodge di una 1–forma $\pm(\vec{\boldsymbol{J}})^\flat$ dove il campo di vettori $\vec{\boldsymbol{J}}$ è definito da

$$\vec{\boldsymbol{J}} = \pm\frac{1}{c}\Big(\vec{\jmath} + \boldsymbol{\rho}\,\vec{\partial}_t\Big) \tag{61}$$

La lagrangiana (51) si può riscrivere come

$$\underline{\mathbf{L}} = -\tfrac{1}{2}\varepsilon c\,\underline{\mathbf{F}} \wedge *\,\underline{\mathbf{F}} + \underline{\mathbf{A}} \wedge \underline{\mathbf{J}} \tag{62}$$

con $\underline{\mathbf{F}} = \underline{\mathbf{d}}\,\underline{\mathbf{A}}$ e $\underline{\mathbf{J}}$ assegnato.

1.8 Formalismo tensoriale quadridimensionale

Le coordinate cartesiane sullo spazio di Minkowski $\boldsymbol{M}_4$ saranno indicate $(x^\alpha) = (x^i, x^4) = (x^1, x^2, x^3, t)$ e sceglieremo la metrica $(g_{\alpha\beta}) = \mathrm{diag}(1, 1, 1, -c^2)$. Le lettere greche minuscole saranno utilizzate per indici che vanno da 1 a 4 mentre le lettere latine minuscole verranno utilizzate per indici che vanno da 1 a 3.

Il tensore di Faraday $\underline{\mathbf{F}}$ si può scrivere attraverso le sue componenti $F_{\alpha\beta}$ che sono antisimmetriche

$$\underline{\mathbf{F}} = F_{\alpha\beta}\,dx^\alpha \otimes dx^\beta = \tfrac{1}{2}F_{\alpha\beta}\,dx^\alpha \wedge dx^\beta \tag{63}$$

Come abbiamo visto, le prime due equazioni di Maxwell si possono riscrivere dicendo che $\underline{\mathbf{d}}\,\underline{\mathbf{F}} = \underline{\mathbf{0}}$.

Essendo

$$
\begin{aligned}
\underline{\mathbf{d}}\,\underline{\mathbf{F}} &= \tfrac{1}{2}\, dF_{\alpha\beta} \wedge dx^\alpha \wedge dx^\beta \\
&= \tfrac{1}{2}\, \partial_\mu\, F_{\alpha\beta}\, dx^\mu \wedge dx^\alpha \wedge dx^\beta \\
&= \tfrac{1}{2}\, \partial_{[\mu}\, F_{\alpha\beta]}\, dx^\mu \wedge dx^\alpha \wedge dx^\beta \\
&= \tfrac{1}{6}\, (\partial_\mu\, F_{\alpha\beta} + \partial_\beta\, F_{\mu\alpha} + \partial_\alpha\, F_{\beta\mu})\, dx^\mu \wedge dx^\alpha \wedge dx^\beta \\
&= (\partial_\mu\, F_{\alpha\beta} + \partial_\beta\, F_{\mu\alpha} + \partial_\alpha\, F_{\beta\mu})\, dx^\mu \otimes dx^\alpha \otimes dx^\beta
\end{aligned}
\tag{64}
$$

le equazioni diventano

$$
\partial_\mu\, F_{\alpha\beta} + \partial_\beta\, F_{\mu\alpha} + \partial_\alpha\, F_{\beta\mu} = 0 \tag{65}
$$

Queste equazioni ammettono soluzioni locali del tipo

$$
F_{\alpha\beta} = \partial_\alpha\, A_\beta - \partial_\beta\, A_\alpha \tag{66}
$$

dove le componenti A_α sono le componenti del potenziale (55)

$$
\underline{\mathbf{A}} = A_\alpha\, dx^\alpha = A_i\, dx^i + A_4\, dt = A_i\, dx^i - \varphi\, dt \tag{67}
$$

e le trasformazioni (43) di gauge sono

$$
A_\alpha \longmapsto A'_\alpha = A_\alpha + \partial_\alpha\, \Lambda \tag{68}
$$

. . . .

Riferimenti bibliografici

[1] S. Kobayashi, K. Nomizu: *Foundations of Differential Geometry, Vol. I*; John Wiley & Sons, New York · Chichester · Brisbane · Toronto · Singapore, 1963.

[2] S. Kobayashi, K. Nomizu: *Foundations of Differential Geometry, Vol. II*; John Wiley & Sons, New York · Chichester · Brisbane · Toronto, 1969.

[3] J. Dieudonné: *Éléments d'analyse 1 : Fondements de l'analyse moderne*; Gauthier–Villars, Paris, 1969.

[4] J. Dieudonné: *Éléments d'analyse 3*; Gauthier–Villars, Paris, 1969.

[5] P.L. García–Pérez: *Connections and* 1*–jet Fiber Bundles*, Rend. Sem. Mat. Univ. Padova **47**, 227–242 (1972).

[6] D. Krupka: *Some geometric aspects of variational problems in fibred manifolds*, . . . , (1973).

[7] M. Ferraris: *Fibered connections and global Poincaré-Cartan forms in higher-order calculus of variations*, Springer–Verlag, Berlin Heidelberg 1993; Differential geometry and its applications, Proc. Conf., Nové Město na Moravě (Czech. 1983), Pt. 2, 61-91 (1984).

[8] I. Kolář, P.W. Michor, J. Slovák: *Natural Operations in Differential Geometry*, Springer–Verlag, Berlin Heidelberg 1993.

[9] P.J. Olver: *Equivalence, Invariants and Symmetry*; Cambridge University Press, 1995.

[10] J. E. Marsden, T. Ratiu, R. Abraham: *Manifolds, tensor analysis and applications, Third Edition*; Springer–Verlag, 2001.

[11] M. Ferraris: *Appunti di algebra lineare, multilineare e tensori*; 2023.

[12] M. Ferraris: *Appunti di calcolo differenziale sugli spazi affini*; 2023.

[13] M. Ferraris: *Varietà differenziabili di dimensione finita*; 2023.

[14] M. Ferraris: *Appunti sui gruppi di Lie*; 2023.

[15] M. Ferraris: *Appunti sugli spazi di getti*; 2023.