Il teorema di Noether

Marco Ferraris

2023

Nel 1915 la matematica tedesca Emmy Noether ha dimostrato un risultato importantissimo (pubblicato poi nel 1918) che mette in relazione le simmetrie e le costanti del moto di un sistema lagrangiano. Detto nel linguaggio odierno: ad ogni gruppo ad un parametro di simmetrie di una lagrangiana L corrisponde una quantità conservata. La dimostrazione che vedremo in questo capitolo è la versione moderna della dimostrazione del teorema di Noether ed è basata sulle proprietà della forma di Poincaré–Cartan $\underline{\boldsymbol{\Theta}}_L$ di una lagrangiana L.

1 Forme di contatto

Definizione 1.1 *Dato un fibrato delle configurazioni* $\chi : \boldsymbol{Q} \to \mathbb{R}$, *le* 1–forme di contatto *sul fibrato* $\chi^k : J^k\boldsymbol{Q} \to \mathbb{R}$ *sono le 1–forme* $\underline{\boldsymbol{\omega}} \in \boldsymbol{\Omega}^1(J^k\boldsymbol{Q})$ *tali che per ogni sezione* $\boldsymbol{\gamma} : \mathbb{R} \to \boldsymbol{Q}$ *sia*

$$(j^k\boldsymbol{\gamma})^*(\underline{\boldsymbol{\omega}}) = 0\,. \tag{1}$$

L'insieme $\boldsymbol{\mathcal{K}}^1(J^k\boldsymbol{Q})$ delle 1-forme di contatto di classe C^∞ è un sottomodulo del modulo $\boldsymbol{\Omega}^1(J^k\boldsymbol{Q})$.

Osservazione 1.1 Si dimostra facilmente che le 1–forme di contatto sul fibrato $\chi^1 : J^1\boldsymbol{Q} \to \mathbb{R}$ sono le 1–forme che in ogni sistema di coordinate fibrate naturali $(t, q^\alpha, \dot{q}^\alpha)$ hanno la seguente espressione

$$\underline{\boldsymbol{\omega}} = \omega_\beta(t, q, \dot{q})\,(dq^\beta - \dot{q}^\beta dt)\,. \tag{2}$$

Osservazione 1.2 Le 1–forme di contatto sul fibrato $\chi^2 : J^2\boldsymbol{Q} \to \mathbb{R}$ sono le 1–forme che in ogni sistema di coordinate fibrate naturali $(t, q^\alpha, \dot{q}^\alpha, \ddot{q}^\alpha)$ hanno la seguente espressione

$$\underline{\boldsymbol{\omega}} = \omega_\beta(t, q, \dot{q}, \ddot{q})\,(dq^\beta - \dot{q}^\beta dt) + \tilde{\omega}_\beta(t, q, \dot{q}, \ddot{q})\,(d\dot{q}^\beta - \ddot{q}^\beta dt)\,. \tag{3}$$

Osservazione 1.3 Siccome la base $\mathbb{R}$ del fibrato $\boldsymbol{Q}$ ha dimensione 1, la condizione (1) è soddisfatta da tutte le p–forme con $p > 1$ e, quindi, la (1) non può essere utilizzata per definire le forme di contatto di ordine $p > 1$.

2 Morfismi di fibrati delle configurazioni

Definizione 2.1 *Un* morfismo *fra due fibrati delle configurazioni* $\chi_1 : \boldsymbol{Q}_1 \to \mathbb{R}$ *e* $\chi_2 : \boldsymbol{Q}_2 \to \mathbb{R}$ *è una funzione* $\Phi : \boldsymbol{Q}_1 \to \boldsymbol{Q}_2$ *che manda fibre dentro a fibre.*

Deve quindi esistere una funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tale che il seguente diagramma

$$\begin{tikzcd} \boldsymbol{Q}_1 \arrow[r, "\Phi"] \arrow[d, "\chi_1"'] & \boldsymbol{Q}_2 \arrow[d, "\chi_2"] \\ \mathbb{R} \arrow[r, "f"'] & \mathbb{R} \end{tikzcd}$$

sia commutativo. Per convenzione chiameremo morfismo anche la coppia di funzioni (Φ, f).

Si ha un *isomorfismo* di varietà fibrate quando la funzione Φ è un diffeomorfismo. In questo caso la funzione f è automaticamente un diffeomorfismo ed il diagramma

$$\begin{tikzcd} \boldsymbol{Q}_2 \arrow[r, "\Phi^{-1}"] \arrow[d, "\chi_2"'] & \boldsymbol{Q}_1 \arrow[d, "\chi_1"] \\ \mathbb{R} \arrow[r, "f^{-1}"'] & \mathbb{R} \end{tikzcd}$$

è commutativo.

La definizione appena data è fin troppo generale e per definire un morfismo di varietà fibrate noi chiederemo sempre che la funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sia un diffeomorfismo. Una famiglia speciale di morfismi e di isomorfismi si ottiene imponendo che la funzione f sia l'identità.

Utilizzando coordinate fibrate (t, x^i) su $\boldsymbol{Q}_1$ e (t', y^α) su $\boldsymbol{Q}_2$ il morfismo (Φ, f) ha un'espressione del tipo

$$\Phi : (t, x^i) \longmapsto (t', y^\alpha) = (f(t), \phi^\alpha(t, x^i))$$

Dati due morfismi

$$\begin{tikzcd} \boldsymbol{Q}_1 \arrow[r, "\Phi_{21}"] \arrow[d, "\chi_1"'] & \boldsymbol{Q}_2 \arrow[d, "\chi_2"] \\ \mathbb{R} \arrow[r, "f_{21}"'] & \mathbb{R} \end{tikzcd} \quad \text{e} \quad \begin{tikzcd} \boldsymbol{Q}_2 \arrow[r, "\Phi_{32}"] \arrow[d, "\chi_2"] & \boldsymbol{Q}_3 \arrow[d, "\chi_3"] \\ \mathbb{R} \arrow[r, "f_{32}"'] & \mathbb{R} \end{tikzcd}$$

le due funzioni $\Phi_{31} = \Phi_{32} \circ \Phi_{21}$ e $f_{31} = f_{32} \circ f_{21}$ definiscono un morfismo, in quanto il diagramma

$$\begin{tikzcd} \boldsymbol{Q}_1 \arrow[r, "\Phi_{31}"] \arrow[d, "\chi_1"'] & \boldsymbol{Q}_3 \arrow[d, "\chi_3"] \\ \mathbb{R} \arrow[r, "f_{31}"'] & \mathbb{R} \end{tikzcd}$$

è commutativo.

3 Prolungamenti di morfismi di fibrati

Un morfismo $\Phi : \boldsymbol{Q}_1 \to \boldsymbol{Q}_2$ fra due fibrati delle configurazioni $\chi_{_1} : \boldsymbol{Q}_1 \to \mathbb{R}$ e $\chi_{_2} : \boldsymbol{Q}_2 \to \mathbb{R}$ può essere prolungato ad un morfismo $J^1\Phi : J^1\boldsymbol{Q}_1 \to J^1\boldsymbol{Q}_2$ richiedendo che la controimmagine di ogni 1–forma di contatto sia una 1–forma di contatto

$$(J^1\Phi)^* \left(\boldsymbol{\mathcal{K}}^1(J^1\boldsymbol{Q}_2)\right) \subseteq \boldsymbol{\mathcal{K}}^1(J^1\boldsymbol{Q}_1)$$

In coordinate fibrate naturali si ha:

$$J^1\Phi : (t, x^i, \dot{x}^i) \longmapsto (t', y^\alpha, \dot{y}^\beta) = (f(t), \phi^\alpha(t, x^i), \tilde{\phi}^\beta(t, x^i, \dot{x}^i))$$

con le funzioni $\tilde{\phi}^\beta(t, x^i, \dot{x}^i)$ definite implicitamente da

$$\frac{\partial \phi^\beta}{\partial t} + \dot{x}^i \frac{\partial \phi^\beta}{\partial x^i} - \tilde{\phi}^\beta \frac{df}{dt} = 0\,.$$

Ovviamente la formula è più semplice quando la funzione f è l'identità.

Il diagramma

$$\begin{tikzcd}
J^1\boldsymbol{Q}_1 \arrow[r, "J^1\Phi"] \arrow[d, "(\chi_1)^1_0"'] & J^1\boldsymbol{Q}_2 \arrow[d, "(\chi_2)^1_0"] \\
\boldsymbol{Q}_1 \arrow[r, "\Phi"] \arrow[d, "\chi_1"'] & \boldsymbol{Q}_2 \arrow[d, "\chi_2"] \\
\mathbb{R} \arrow[r, "f"'] & \mathbb{R}
\end{tikzcd}$$

è commutativo ed il prolungamento $J^1(\cdot)$ si comporta come un *funtore covariante*:

$$J^1(\Phi_{32} \circ \Phi_{21}) = J^1(\Phi_{32}) \circ J^1(\Phi_{21})$$

In maniera analoga si possono definire i prolungamenti $J^k\Phi : J^k\boldsymbol{Q}_1 \to J^k\boldsymbol{Q}_2$ richiedendo che

$$(J^k\Phi)^* \left(\boldsymbol{\mathcal{K}}^1(J^k\boldsymbol{Q}_2)\right) \subseteq \boldsymbol{\mathcal{K}}^1(J^k\boldsymbol{Q}_1)\,.$$

Anche in questo caso si ha

$$J^k(\Phi_{32} \circ \Phi_{21}) = J^k(\Phi_{32}) \circ J^k(\Phi_{21})\,.$$

4 Prolungamenti di campi di vettori

Oltre a prolungare i morfismi fra fibrati delle configurazioni, si possono prolungare anche i campi di vettori. Per fare questo si utilizzano ancora le forme di contatto ed i campi di vettori che le preservano attraverso la derivata di Lie.

Definizione 4.1 *Una* trasformazione infinitesima di contatto *sul fibrato* $\chi^1 : J^1\boldsymbol{Q} \to \mathbb{R}$ *è un campo di vettori* $\vec{\boldsymbol{\Xi}}$ *su* $J^1\boldsymbol{Q}$ *che conserva le 1–forme di contatto. Cioè, un campo di vettori* $\vec{\boldsymbol{\Xi}} \in \mathfrak{X}(J^1\boldsymbol{Q})$ *tale che*

$$\mathcal{L}_{\vec{\boldsymbol{\Xi}}}\left(\boldsymbol{\mathcal{K}}^1(J^1\boldsymbol{Q})\right) \subseteq \boldsymbol{\mathcal{K}}^1(J^1\boldsymbol{Q})\,. \tag{4}$$

Teorema 4.1 *Condizione necessaria e sufficiente affinché la condizione* (4) *sia soddisfatta è che in ogni sistema di coordinate fibrate naturali* $(t, q^\alpha, \dot{q}^\beta)$ *esistano delle funzioni* $A^\alpha_\beta(t, q, \dot{q})$ *tali che*

$$\mathcal{L}_{\vec{\boldsymbol{\Xi}}}(dq^\alpha - \dot{q}^\alpha dt) = A^\alpha_\beta(t, q, \dot{q})(dq^\beta - \dot{q}^\beta dt) \tag{5}$$

Dimostrazione. Dato che per le 1-forme di contatto $\underline{\boldsymbol{\omega}}$ su $J^1\boldsymbol{Q}$ vale la (2) e che per ogni forma differenziale

$$\mathcal{L}_{\vec{\boldsymbol{\Xi}}}\,\underline{\boldsymbol{\omega}} = \vec{\boldsymbol{\Xi}} \rfloor d\underline{\boldsymbol{\omega}} + d(\vec{\boldsymbol{\Xi}} \rfloor \underline{\boldsymbol{\omega}})\,, \tag{6}$$

per una 1–forma di contatto si ha

$$\mathcal{L}_{\vec{\boldsymbol{\Xi}}}\,\underline{\boldsymbol{\omega}} = \vec{\boldsymbol{\Xi}}(\omega_\beta(t, q, \dot{q}))\,(dq^\beta - \dot{q}^\beta dt) + \omega_\beta(t, q, \dot{q})\mathcal{L}_{\vec{\boldsymbol{\Xi}}}(dq^\beta - \dot{q}^\beta dt)\,. \tag{7}$$

Basta, quindi, verificare sotto quali condizioni le 1-forme $\mathcal{L}_{\vec{\boldsymbol{\Xi}}}(dq^\beta - \dot{q}^\beta dt)$ sono forme di contatto.

Introducendo le componenti del campo di vettori $\vec{\boldsymbol{\Xi}}$ abbiamo

$$\vec{\boldsymbol{\Xi}} = \xi(t, q, \dot{q})\frac{\partial}{\partial t} + \xi^\alpha(t, q, \dot{q})\frac{\partial}{\partial q^\alpha} + \Xi^\alpha(t, q, \dot{q})\frac{\partial}{\partial \dot{q}^\alpha} \tag{8}$$

e, quindi,

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{\vec{\Xi}}\left(dq^\beta - \dot{q}^\beta dt\right) &= \vec{\Xi} \rfloor d(dq^\beta - \dot{q}^\beta dt) + d\left(\vec{\Xi} \rfloor (dq^\beta - \dot{q}^\beta dt)\right) \\
&= \vec{\Xi} \rfloor (-d\dot{q}^\beta \wedge dt) + d\left(\left(\vec{\Xi} \rfloor dq^\beta\right) - \dot{q}^\beta \left(\vec{\Xi} \rfloor dt\right)\right) \\
&= -\left(\vec{\Xi} \rfloor d\dot{q}^\beta\right) dt + d\dot{q}^\beta \left(\vec{\Xi} \rfloor dt\right) + d\left(\vec{\Xi} \rfloor dq^\beta - \dot{q}^\beta\, \vec{\Xi} \rfloor dt\right) \\
&= -\Xi^\beta\, dt + \xi\, d\dot{q}^\beta + d\left(\xi^\beta - \dot{q}^\beta\, \xi\right) \\
&= \left[-\Xi^\beta + D\left(\xi^\beta - \dot{q}^\beta\, \xi\right)\right] dt + \frac{\partial(\xi^\beta - \dot{q}^\beta\, \xi)}{\partial q^\alpha}\left(dq^\alpha - \dot{q}^\alpha dt\right) \\
&\quad + \left[\xi \delta^\beta_\alpha + \frac{\partial(\xi^\beta - \dot{q}^\beta\, \xi)}{\partial \dot{q}^\alpha}\right] d\dot{q}^\alpha
\end{aligned} \tag{9}$$

dove D è l'operatore differenziale definito da

$$D = \frac{\partial}{\partial t} + \dot{q}^\sigma \frac{\partial}{\partial q^\sigma} \tag{10}$$

Imponendo che valga la (5) si deduce che nella (9) devono annullarsi i coefficienti di dt e delle $d\dot{q}^\alpha$. Devono, quindi, valere le seguenti equazioni

$$D\left(\xi^\beta - \dot{q}^\beta\, \xi\right) - \Xi^\beta = 0 \tag{11}$$

$$\xi \delta^\beta_\alpha + \frac{\partial(\xi^\beta - \dot{q}^\beta\, \xi)}{\partial \dot{q}^\alpha} = 0 \tag{12}$$

Le equazioni (11) ci dicono semplicemente come si calcolano i coefficienti Ξ^β

$$\Xi^\beta = D\left(\xi^\beta - \dot{q}^\beta\, \xi\right) = D\xi^\beta - \dot{q}^\beta\, D\xi \tag{13}$$

Derivando le equazioni (12) rispetto alle $\dot{q}^\sigma$ ed antisimmetrizzando negli indici α e σ si deduce che

$$\delta^\beta_\alpha \frac{\partial \xi}{\partial \dot{q}^\sigma} - \delta^\beta_\sigma \frac{\partial \xi}{\partial \dot{q}^\alpha} = 0 \tag{14}$$

e calcolando la traccia delle (14) si ottiene

$$(\delta^\alpha_\alpha - 1) \frac{\partial \xi}{\partial \dot{q}^\sigma} = (n-1) \frac{\partial \xi}{\partial \dot{q}^\sigma} = 0 \tag{15}$$

dove $n = \dim(\boldsymbol{Q}) - 1$ è la dimensione delle fibre di $\boldsymbol{Q}$.

Si presentano due casi distinti da discutere

Caso $n = 1$

La funzione $A(t, q^1, \dot{q}^1) = \xi^1(t, q^1, \dot{q}^1) - \dot{q}^1\, \xi(t, q^1, \dot{q}^1)$ è arbitraria e si ha

$$\Xi^1 = DA \tag{16}$$

$$\xi = -\frac{\partial A}{\partial \dot{q}^1} \tag{17}$$

$$\xi^1 = A - \dot{q}^1 \frac{\partial A}{\partial \dot{q}^1} \tag{18}$$

Quindi il campo $\vec{\boldsymbol{\Xi}}$ è definito da

$$\vec{\boldsymbol{\Xi}} = \left(-\frac{\partial A}{\partial \dot{q}^1}\right) \frac{\partial}{\partial t} + \left(A - \dot{q}^1 \frac{\partial A}{\partial \dot{q}^1}\right) \frac{\partial}{\partial q^1} + \left(\frac{\partial A}{\partial t} + \dot{q}^1 \frac{\partial A}{\partial q^1}\right) \frac{\partial}{\partial \dot{q}^1} \tag{19}$$

Caso $n > 1$

Dalla (15) si deduce che la funzione ξ non dipende dalle $\dot{q}^\sigma$. Espandendo le (12) si ha

$$\frac{\partial \xi^\beta}{\partial \dot{q}^\alpha} - \dot{q}^\beta \frac{\partial \xi}{\partial \dot{q}^\alpha} = 0 \tag{20}$$

e, quindi, neanche i coefficienti ξ^β dipendono dalle $\dot{q}^\alpha$. Questo ci dice che il campo di vettori $\vec{\boldsymbol{\Xi}}$ è definito da

$$\begin{aligned}
\vec{\boldsymbol{\Xi}} &= \xi(t,q)\frac{\partial}{\partial t} + \xi^\alpha(t,q)\frac{\partial}{\partial q^\alpha} + (D\xi^\beta - \dot{q}^\beta\, D\xi)\frac{\partial}{\partial \dot{q}^\beta} \\
&= \xi(t,q)\frac{\partial}{\partial t} + \xi^\alpha(t,q)\frac{\partial}{\partial q^\alpha} + \left[\left(\frac{\partial \xi^\beta}{\partial t} + \dot{q}^\alpha \frac{\partial \xi^\beta}{\partial q^\alpha}\right) - \dot{q}^\beta \left(\frac{\partial \xi}{\partial t} + \dot{q}^\alpha \frac{\partial \xi}{\partial q^\alpha}\right)\right] \frac{\partial}{\partial \dot{q}^\beta} \\
&= \xi(t,q)\frac{\partial}{\partial t} + \xi^\alpha(t,q)\frac{\partial}{\partial q^\alpha} + \left(\frac{d\xi^\beta}{dt} - \dot{q}^\beta \frac{d\xi}{dt}\right) \frac{\partial}{\partial \dot{q}^\beta}
\end{aligned} \tag{21}$$

Volendo si può anche scrivere, *ma solo formalmente*, che

$$\vec{\boldsymbol{\Xi}} = \xi \left(\frac{\partial}{\partial t} + \dot{q}^\alpha \frac{\partial}{\partial q^\alpha} + \ddot{q}^\alpha \frac{\partial}{\partial \dot{q}^\alpha}\right) + (\xi^\alpha - \xi \dot{q}^\alpha)\, \frac{\partial}{\partial q^\alpha} + \frac{d}{dt}\left(\xi^\beta - \dot{q}^\beta \xi\right) \frac{\partial}{\partial \dot{q}^\beta} \tag{22}$$

in quanto i termini che contengono le $\ddot{q}^\alpha$ si elidono. ■

Un campo di vettori $\vec{\boldsymbol{\Xi}}$ definito dalla (21) è proiettabile su $\boldsymbol{Q}$ e la sua proiezione è il campo di vettori $\vec{\boldsymbol{\xi}}$ su $\boldsymbol{Q}$ definito da

$$\vec{\boldsymbol{\xi}} = \xi(t,q)\frac{\partial}{\partial t} + \xi^\alpha(t,q)\frac{\partial}{\partial q^\alpha} \tag{23}$$

Definizione 4.2 *Il campo di vettori* $\vec{\boldsymbol{\Xi}} \in \mathfrak{X}(J^1\boldsymbol{Q})$ *definito* (21) *dalla sarà detto* prolungamento del prim'ordine *del campo di vettori* $\vec{\boldsymbol{\xi}} \in \mathfrak{X}(\boldsymbol{Q})$ *definito dalla* (23) *e verrà indicato con* $J^1\vec{\boldsymbol{\xi}}$.

5 Forma di Poincaré–Cartan

Teorema 5.1 *Dato un sistema lagrangiano* $(\boldsymbol{Q}, L)$*, esiste una sola* 1*–forma differenziale* $\underline{\boldsymbol{\Theta}}_L \in \boldsymbol{\Omega}^1(J^1\boldsymbol{Q})$ *che soddisfa alle seguenti condizioni:*

1. *per ogni sezione (locale o globale)* $\boldsymbol{\gamma}$ *del fibrato delle configurazioni* $\chi : \boldsymbol{Q} \to \mathbb{R}$ *si ha:*

$$(j^1\boldsymbol{\gamma})^*(\underline{\boldsymbol{\Theta}}_L) = (j^1\boldsymbol{\gamma})^*(\underline{\boldsymbol{L}}) = \left(L \circ j^1\boldsymbol{\gamma}\right)\, dt$$

2. *il differenziale* $d\underline{\boldsymbol{\Theta}}_L$ *è una* 2*–forma che sta nel sottomodulo* $\boldsymbol{\mathcal{K}}^1(J^1\boldsymbol{Q}) \wedge \boldsymbol{\Omega}^1(J^1\boldsymbol{Q})$ *del modulo* $\boldsymbol{\Omega}^2(J^1\boldsymbol{Q})$.

Dimostrazione. La prima condizione ci dice che

$$\underline{\boldsymbol{\Theta}}_L - \underline{\boldsymbol{L}} \in \boldsymbol{\mathcal{K}}^1(J^1\boldsymbol{Q}) \tag{24}$$

e, quindi, che in ogni sistema di coordinate fibrate naturali $(t, q^\alpha, \dot{q}^\alpha)$ si ha

$$\underline{\boldsymbol{\Theta}}_L = L(t, q, \dot{q})dt + P_\alpha(t, q, \dot{q})\,(dq^\alpha - \dot{q}^\alpha dt)\,. \tag{25}$$

Calcolando il differenziale $d\underline{\boldsymbol{\Theta}}_L$, si ottiene

$$\begin{aligned} d\underline{\boldsymbol{\Theta}}_L &= dL \wedge dt + dP_\alpha \wedge (dq^\alpha - \dot{q}^\alpha dt) - P_\alpha \, d\dot{q}^\alpha \wedge dt \\ &= \frac{\partial L}{\partial q^\alpha} dq^\alpha \wedge dt + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^\alpha} d\dot{q}^\alpha \wedge dt + dP_\alpha \wedge (dq^\alpha - \dot{q}^\alpha dt) - P_\alpha \, d\dot{q}^\alpha \wedge dt \\ &= (dq^\alpha - \dot{q}^\alpha dt) \wedge \left(\frac{\partial L}{\partial q^\alpha} dt - dP_\alpha \right) + \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^\alpha} - P_\alpha \right) d\dot{q}^\alpha \wedge dt \,. \end{aligned} \tag{26}$$

La seconda condizione è verificata se e solo se

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^\alpha} - P_\alpha = 0 \tag{27}$$

da cui si deduce, infine, che

$$\underline{\boldsymbol{\Theta}}_L = L(t, q, \dot{q}) dt + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^\alpha}(t, q, \dot{q}) \, (dq^\alpha - \dot{q}^\alpha dt) \,. \tag{28}$$

e che

$$d\underline{\boldsymbol{\Theta}}_L = (dq^\alpha - \dot{q}^\alpha dt) \wedge \left[\frac{\partial L}{\partial q^\alpha} dt - d \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^\alpha} \right) \right] \tag{29}$$

■

Definizione 5.1 *La 1–forma* $\underline{\boldsymbol{\Theta}}_L$ *definita dalla formula* (28) *si dice* forma di Poincaré–Cartan *della lagrangiana* L.

La forma di Poincaré–Cartan $\underline{\boldsymbol{\Theta}}_L$ permette di caratterizzare in maniera geometrica le sezioni $\boldsymbol{\gamma} : \mathbb{R} \to \boldsymbol{Q}$ che sono soluzioni delle equazioni di Eulero–Lagrange della lagrangiana L.

Teorema 5.2 *Dato un sistema lagrangiano $(\boldsymbol{Q}, L)$, una sezione $\boldsymbol{\gamma} : \mathbb{R} \to \boldsymbol{Q}$ è una soluzione delle equazioni di Eulero–Lagrange della lagrangiana L se e solo se*

$$(j^1\boldsymbol{\gamma})^*(\vec{\boldsymbol{\Xi}} \rfloor d\underline{\boldsymbol{\Theta}}_L) = 0 \qquad \forall \vec{\boldsymbol{\Xi}} \in \mathfrak{X}(J^1\boldsymbol{Q}) \tag{30}$$

Dimostrazione. Tenendo conto delle formule (8) e (29), il prodotto interno $\vec{\boldsymbol{\Xi}} \rfloor d\underline{\boldsymbol{\Theta}}_L$ si può riscrivere come segue

$$\begin{aligned}
\vec{\boldsymbol{\Xi}} \rfloor d\underline{\boldsymbol{\Theta}}_L &= \vec{\boldsymbol{\Xi}} \rfloor \left((dq^\alpha - \dot{q}^\alpha dt) \wedge \left(\frac{\partial L}{\partial q^\alpha} dt - d\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^\alpha} \right) \right) \right) \\
&= \left(\vec{\boldsymbol{\Xi}} \rfloor (dq^\alpha - \dot{q}^\alpha dt) \right) \left(\frac{\partial L}{\partial q^\alpha} dt - d\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^\alpha} \right) \right) \\
&\quad -(dq^\alpha - \dot{q}^\alpha dt) \left(\vec{\boldsymbol{\Xi}} \rfloor \left(\frac{\partial L}{\partial q^\alpha} dt - d\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^\alpha} \right) \right) \right) \\
&= \left((\vec{\boldsymbol{\Xi}} \rfloor dq^\alpha) - \dot{q}^\alpha (\vec{\boldsymbol{\Xi}} \rfloor dt) \right) \left(\frac{\partial L}{\partial q^\alpha} dt - d\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^\alpha} \right) \right) \\
&\quad -(dq^\alpha - \dot{q}^\alpha dt) \left(\frac{\partial L}{\partial q^\alpha} (\vec{\boldsymbol{\Xi}} \rfloor dt) - \vec{\boldsymbol{\Xi}} \rfloor d\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^\alpha} \right) \right) \\
&= (\xi^\alpha - \dot{q}^\alpha \xi) \left(\frac{\partial L}{\partial q^\alpha} dt - d\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^\alpha} \right) \right) - (dq^\alpha - \dot{q}^\alpha dt) \left(\frac{\partial L}{\partial q^\alpha} \xi - \vec{\boldsymbol{\Xi}} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^\alpha} \right) \right)
\end{aligned} \tag{31}$$

Ricordando che per ogni sezione $\boldsymbol{\gamma}$ si ha $(j^1\boldsymbol{\gamma})^*(dq^\alpha - \dot{q}^\alpha dt) \equiv 0$, si ottiene

$$(j^1\boldsymbol{\gamma})^*(\vec{\boldsymbol{\Xi}} \rfloor d\underline{\boldsymbol{\Theta}}_L) \;=\; (j^1\boldsymbol{\gamma})^* \left((\xi^\alpha - \dot{q}^\alpha \xi) \left(\frac{\partial L}{\partial q^\alpha} dt - d\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^\alpha} \right) \right) \right)$$

$$
\begin{aligned}
&= (j^1\boldsymbol{\gamma})^*\left(\xi^\alpha - \dot{q}^\alpha \xi\right)(j^1\boldsymbol{\gamma})^*\left(\frac{\partial L}{\partial q^\alpha}dt - d\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^\alpha}\right)\right) \\
&= \delta q^\alpha(t)\left(\left(\frac{\partial L}{\partial q^\alpha}\circ j^1\boldsymbol{\gamma}\right)dt - d\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^\alpha}\circ j^1\boldsymbol{\gamma}\right)\right) \\
&= \delta q^\alpha(t)\left(\left(\frac{\partial L}{\partial q^\alpha}\circ j^1\boldsymbol{\gamma}\right) - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^\alpha}\circ j^1\boldsymbol{\gamma}\right)\right)dt
\end{aligned} \tag{32}
$$

dove si è posto

$$
\delta q^\alpha(t) = (j^1\boldsymbol{\gamma})^*\left(\xi^\alpha - \dot{q}^\alpha\xi\right) = (\xi^\alpha \circ j^1\boldsymbol{\gamma}) - \frac{d\gamma^\alpha(t)}{dt}(\xi\circ j^1\boldsymbol{\gamma}) \tag{33}
$$

Dalla (32) si deduce immediatamente che

$$
\left(\frac{\partial L}{\partial q^\alpha}\circ j^1\boldsymbol{\gamma}\right) - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^\alpha}\circ j^1\boldsymbol{\gamma}\right) = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \forall \vec{\boldsymbol{\Xi}} \quad (j^1\boldsymbol{\gamma})^*(\vec{\boldsymbol{\Xi}} \,\lrcorner\, d\underline{\boldsymbol{\Theta}}_{L}) = 0 \tag{34}
$$

Quindi, se $\boldsymbol{\gamma} : \mathbb{R} \to \boldsymbol{Q}$ è una soluzione delle equazioni di Eulero–Lagrange della lagrangiana L allora $(j^1\boldsymbol{\gamma})^*(\vec{\boldsymbol{\Xi}} \,\lrcorner\, d\underline{\boldsymbol{\Theta}}_{L}) = 0$.

D'altra parte, se il campo di vettori $\vec{\boldsymbol{\Xi}} \in \mathfrak{X}(J^1\boldsymbol{Q})$ è arbitrario allora le le funzioni $\delta q^\alpha(t)$ definite dalla (33) sono arbitrarie e, quindi, si deduce che

$$
(j^1\boldsymbol{\gamma})^*(\vec{\boldsymbol{\Xi}} \,\lrcorner\, d\underline{\boldsymbol{\Theta}}_{L}) = 0 \quad \forall \vec{\boldsymbol{\Xi}} \in \mathfrak{X}(J^1\boldsymbol{Q}) \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{\partial L}{\partial q^\alpha}\circ j^1\boldsymbol{\gamma}\right) - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^\alpha}\circ j^1\boldsymbol{\gamma}\right) = 0 \tag{35}
$$

■

Osservazione 5.1 Data una sezione $\boldsymbol{\gamma} : \mathbb{R} \to \boldsymbol{Q}$, per avere delle funzioni $\delta q^\alpha(t)$ arbitrarie al variare di $\vec{\boldsymbol{\Xi}}$ è sufficiente porre $\xi(t, q, \dot{q}) = 0$ e richiedere che siano arbitrarie le componenti $\xi^\alpha(t, q, \dot{q})$. Quindi, per per dimostrare la validità della (35) ci si può limitare a considerare i campi di vettori $\vec{\boldsymbol{\Xi}} \in \mathfrak{X}(J^1\boldsymbol{Q})$ che sono verticali per la proiezione $\chi^1 : J^1\boldsymbol{Q} \to \mathbb{R}$.

Osservazione 5.2 Visto che le componenti $\Xi^\alpha(t, q, \dot{q})$ non entrano nella definizione delle $\delta q^\alpha(t)$ e che queste ultime rimangono arbitrarie anche se si suppone che $\xi^\alpha = \xi^\alpha(t, q)$, si deduce che per dimostrare la validità della (35) ci si può limitare a considerare solamente i campi di vettori $\vec{\boldsymbol{\Xi}} = J^1\vec{\boldsymbol{\xi}}$ che sono prolungamenti di campi di vettori *verticali* $\vec{\boldsymbol{\xi}} \in \mathfrak{X}_V(\boldsymbol{Q})$.

6 Gruppi ad un parametro di automorfismi

Assegnare un gruppo ad un parametro di automorfismi $(\Phi_\lambda, f_\lambda)$ di un fibrato delle configurazioni $\chi : \boldsymbol{Q} \to \mathbb{R}$ equivale ad assegnare un gruppo ad un parametro di diffeomorfismi $f_\lambda : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ed un gruppo ad un parametro di diffeomorfismi $\Phi_\lambda : \boldsymbol{Q} \to \boldsymbol{Q}$ tali che il seguente diagramma

$$\begin{tikzcd} \boldsymbol{Q} \arrow[r, "\Phi_\lambda"] \arrow[d, "\chi"'] & \boldsymbol{Q} \arrow[d, "\chi"] \\ \mathbb{R} \arrow[r, "f_\lambda"'] & \mathbb{R} \end{tikzcd}$$

sia commutativo. In coordinate fibrate si ha

$$\Phi_\lambda : (t, q) \longmapsto (f_\lambda(t), \phi_\lambda(t, q)) \tag{36}$$

Considerando i prolungamenti $J^1\Phi_\lambda$ degli automorfismi Φ_λ otteniamo un gruppo ad un parametro di diffeomorfismi di $J^1\Phi_\lambda : J^1\boldsymbol{Q} \to J^1\boldsymbol{Q}$ che rendono commutativo il diagramma

$$\begin{tikzcd}
J^1\boldsymbol{Q} \arrow[r, "J^1\Phi_\lambda"] \arrow[d, "\chi_0^1"'] & J^1\boldsymbol{Q} \arrow[d, "\chi_0^1"] \\
\boldsymbol{Q} \arrow[r, "\Phi_\lambda"] \arrow[d, "\chi"'] & \boldsymbol{Q} \arrow[d, "\chi"] \\
\mathbb{R} \arrow[r, "f_\lambda"'] & \mathbb{R}
\end{tikzcd}$$

In coordinate fibrate naturali si ha

$$J^1\Phi_\lambda : (t, q, \dot{q}) \longmapsto \left(f_\lambda(t), \phi_\lambda(t, q), \left(\frac{\partial \phi_\lambda}{\partial t} + \dot{q}^\alpha \frac{\partial \phi_\lambda}{\partial q^\alpha} \right) \left(\frac{df_\lambda}{dt} \right)^{-1} \right) \tag{37}$$

Se consideriamo i tre campi di vettori che generano i tre gruppi ad un parametro, otteniamo il campo di vettori

$$\vec{\boldsymbol{\xi}}(t) = \left. \frac{df_\lambda(t)}{d\lambda} \right|_{\lambda=0} = \xi(t) \frac{d}{dt} \tag{38}$$

che genera il gruppo ad un parametro f_λ, il campo di vettori

$$\vec{\boldsymbol{\Xi}}(t, q) = \left. \frac{d\Phi_\lambda(t, q)}{d\lambda} \right|_{\lambda=0} = \xi(t) \frac{\partial}{\partial t} + \xi^\alpha(t, q) \frac{\partial}{\partial q^\alpha} \tag{39}$$

dove i coefficienti $\xi^\alpha(t, q)$ sono definiti da

$$\xi^\alpha(t, q) = \left. \frac{d\phi_\lambda^\alpha(t, q)}{d\lambda} \right|_{\lambda=0} \tag{40}$$

che genera il gruppo ad un parametro Φ_λ, ed il campo di vettori

$$\vec{\boldsymbol{\Xi}}'(t,q,\dot q) = \left.\frac{dJ^1\Phi_\lambda(t,q,\dot q)}{d\lambda}\right|_{\lambda=0} = \xi(t)\frac{\partial}{\partial t} + \xi^\alpha(t,q)\frac{\partial}{\partial q^\alpha} + \tilde\xi^\alpha(t,q,\dot q)\frac{\partial}{\partial \dot q^\alpha} \tag{41}$$

dove i coefficienti $\tilde\xi^\alpha(t,q,\dot q)$ sono definiti da

$$\tilde\xi^\alpha(t,q,\dot q) = \left(\frac{\partial\xi^\alpha}{\partial t} + \dot q^\sigma\frac{\partial\xi^\alpha}{\partial q^\sigma}\right) - \dot q^\alpha\frac{d\xi}{dt} \tag{42}$$

che genera il gruppo ad un parametro $J^1\Phi_\lambda$.

Come si vede dalle equazioni (41) e (42), si ha $\vec{\boldsymbol{\Xi}}' \equiv J^1\vec{\boldsymbol{\Xi}}$.

7 Simmetrie di una lagrangiana

Definizione 7.1 *Dato un sistema lagrangiano* $(\boldsymbol{Q}, L)$, *diciamo* simmetria *della lagrangiana* L *ogni automorfismo* (Φ, f) *del fibrato* $\chi : \boldsymbol{Q} \to \mathbb{R}$ *tale che il prolungamento* $J^1\Phi$ *conservi la 1–forma lagrangiana* $\boldsymbol{L} = L(t,q,\dot q)dt$. *Cioè, tale che*

$$(J^1\Phi)^*(\boldsymbol{L}) = \boldsymbol{L} \tag{43}$$

Si dimostra facilmente che se la (43) è verificata allora si ha

$$(J^1\Phi)^*(\underline{\boldsymbol{\Theta}}_L) = \underline{\boldsymbol{\Theta}}_L \tag{44}$$

Consideriamo un gruppo ad un parametro $(\Phi_\lambda, f_\lambda)$ di simmetrie di una lagrangiana L. Dalla (44) si deduce che

$$\forall\lambda \qquad (J^1\Phi_\lambda)^*(\underline{\boldsymbol{\Theta}}_L) = \underline{\boldsymbol{\Theta}}_L \tag{45}$$

e derivando rispetto al parametro λ si ha

$$\frac{d}{d\lambda}\left((J^1\Phi_\lambda)^*(\underline{\boldsymbol{\Theta}}_L)\right) = 0 \tag{46}$$

Se calcoliamo ora la (46) in $\lambda = 0$ otteniamo

$$\left(\frac{d}{d\lambda}\left((J^1\Phi_\lambda)^*(\underline{\boldsymbol{\Theta}}_L)\right)\right)\Bigg|_{\lambda=0} = 0 \tag{47}$$

che per la definizione di *derivata di Lie* si può riscrivere come segue

$$\mathcal{L}_{J^1\boldsymbol{\Xi}}(\underline{\boldsymbol{\Theta}}_L) = 0 \tag{48}$$

Siccome $\underline{\boldsymbol{\Theta}}_L$ è una forma differenziale, possiamo infine scrivere

$$J^1\boldsymbol{\Xi} \rfloor (d\underline{\boldsymbol{\Theta}}_L) + d\left(J^1\boldsymbol{\Xi} \rfloor \underline{\boldsymbol{\Theta}}_L\right) = 0 \tag{49}$$

Consideriamo una sezione $\boldsymbol{\gamma}$ e calcoliamo la controimmagine della (49) attraverso $j^1\boldsymbol{\gamma}$

$$\begin{aligned}
0 &= (j^1\boldsymbol{\gamma})^*\left(J^1\boldsymbol{\Xi} \rfloor (d\underline{\boldsymbol{\Theta}}_L) + d\left(J^1\boldsymbol{\Xi} \rfloor \underline{\boldsymbol{\Theta}}_L\right)\right) \\
&= (j^1\boldsymbol{\gamma})^*\left(J^1\boldsymbol{\Xi} \rfloor (d\underline{\boldsymbol{\Theta}}_L)\right) + (j^1\boldsymbol{\gamma})^*\left(d\left(J^1\boldsymbol{\Xi} \rfloor \underline{\boldsymbol{\Theta}}_L\right)\right) \\
&= (j^1\boldsymbol{\gamma})^*\left(J^1\boldsymbol{\Xi} \rfloor (d\underline{\boldsymbol{\Theta}}_L)\right) + d\left((j^1\boldsymbol{\gamma})^*\left(J^1\boldsymbol{\Xi} \rfloor \underline{\boldsymbol{\Theta}}_L\right)\right)
\end{aligned}$$

$$= \quad (j^1\boldsymbol{\gamma})^* \left(J^1\boldsymbol{\Xi} \rfloor (d\underline{\boldsymbol{\Theta}}_{L})\right) + d\left(\left(J^1\boldsymbol{\Xi} \rfloor \underline{\boldsymbol{\Theta}}_{L}\right) \circ j^1\boldsymbol{\gamma}\right) \tag{50}$$

Se supponiamo ora che la sezione $\boldsymbol{\gamma}$ sia una soluzione delle equazioni di Eulero-Lagrange della lagrangiana L (cioè, una soluzione delle equazioni del moto) la (50) diventa

$$d\left(\left(J^1\boldsymbol{\Xi} \rfloor \underline{\boldsymbol{\Theta}}_{L}\right) \circ j^1\boldsymbol{\gamma}\right) = 0 \tag{51}$$

Siccome la (51) vale per tutte le soluzioni delle equazioni del moto, possiamo dire che la funzione $(J^1\boldsymbol{\Xi} \rfloor \underline{\boldsymbol{\Theta}}_{L})$ è una costante del moto.

Abbiamo dunque dimostrato il teorema di Noether che può essere enunciato nel modo seguente:

Teorema 7.1 (di Noether) *Dato un sistema lagrangiano ad ogni gruppo ad un parametro di simmetrie corrisponde una quantità conservata. In particolare, chiamato $\vec{\boldsymbol{\Xi}}$ il campo di vettori associato al gruppo ad un parametro di simmetrie, la quantità conservata è $\vec{\boldsymbol{\Xi}} \rfloor \underline{\boldsymbol{\Theta}}_{L}$.*

Il teorema di Noether si può estendere facilmente ai gruppi ad un parametro di *simmetrie generalizzate.*

Definizione 7.2 *Diciamo* simmetria generalizzata *della lagrangiana L ogni automorfismo (Φ, f) del fibrato $\chi : \boldsymbol{Q} \to \mathbb{R}$ tale che la 1–forma $(J^1\Phi)^*(\underline{\boldsymbol{\Theta}}_{L})$ sia una forma chiusa:*

$$d\left((J^1\Phi)^*(\underline{\boldsymbol{\Theta}}_{L})\right) = (J^1\Phi)^*(d\underline{\boldsymbol{\Theta}}_{L}) = 0 \tag{52}$$

Consideriamo ora un gruppo ad un parametro $(\Phi_\lambda, f_\lambda)$ di *simmetrie generalizzate* e ripercorriamo la dimostrazione del teorema di Noether. La (48) viene sostituita dalla condizione

$$d\left(\mathcal{L}_{J^1\boldsymbol{\Xi}}(\underline{\boldsymbol{\Theta}}_L)\right) = 0 \tag{53}$$

Per il lemma di Poincaré, localmente esiste una funzione $\beta(t, q, \dot{q})$ (che dipende dal campo di vettori $J^1\boldsymbol{\Xi}$) tale che sia

$$\mathcal{L}_{J^1\boldsymbol{\Xi}}(\underline{\boldsymbol{\Theta}}_L) = d\beta \tag{54}$$

La (49) viene sostituita da

$$J^1\boldsymbol{\Xi} \lrcorner (d\underline{\boldsymbol{\Theta}}_L) + d\left(J^1\boldsymbol{\Xi} \lrcorner \underline{\boldsymbol{\Theta}}_L\right) = d\beta \tag{55}$$

la (50) viene sostituita da

$$(j^1\boldsymbol{\gamma})^*\left(J^1\boldsymbol{\Xi} \lrcorner (d\underline{\boldsymbol{\Theta}}_L)\right) + d\left(\left(J^1\boldsymbol{\Xi} \lrcorner \underline{\boldsymbol{\Theta}}_L - \beta\right) \circ j^1\boldsymbol{\gamma}\right) = 0 \tag{56}$$

e la (51) da

$$d\left(\left(J^1\boldsymbol{\Xi} \lrcorner \underline{\boldsymbol{\Theta}}_L - \beta\right) \circ j^1\boldsymbol{\gamma}\right) = 0 \tag{57}$$

Siccome la (57) vale per tutte le soluzioni delle equazioni del moto, possiamo dire che la funzione $J^1\boldsymbol{\Xi} \lrcorner \underline{\boldsymbol{\Theta}}_L - \beta$ è una costante del moto.

Le considerazioni precedenti ci permettono di dire che vale il seguente teorema

Teorema 7.2 *Ad ogni gruppo ad un parametro di simmetrie generalizzate di un sistema lagrangiano corrisponde una costante del moto. Se* $\vec{\boldsymbol{\Xi}}$ *è il campo di vettori generato dal gruppo ad un parametro e* β *è una funzione tale che* $\mathcal{L}_{J^1\vec{\boldsymbol{\Xi}}}\left(\underline{\boldsymbol{\Theta}}_L\right) = d\beta$ *allora la funzione* $\beta - J^1\vec{\boldsymbol{\Xi}} \rfloor \underline{\boldsymbol{\Theta}}_L$ *è la costante del moto corrispondente.*

8 Simmetrie su varietà riemanniane

Consideriamo un fibrato delle configurazioni banale del tipo $\boldsymbol{Q} = \mathbb{R} \times Q$ e scegliamo una metrica (pseudo-)riemanniana $\boldsymbol{g} = g_{\alpha\beta}(q)dq^\alpha \otimes dq^\beta$ sullo spazio delle configurazioni Q. La funzione $L : TQ \longrightarrow \mathbb{R}$ definita da $L(q,\dot{q}) = \frac{1}{2}g_{\alpha\beta}(q)\dot{q}^\alpha\dot{q}^\beta$ induce una 1-forma orizzontale $\underline{\boldsymbol{L}} = L(q,\dot{q})dt$ sul fibrato $J^1\boldsymbol{Q} \equiv \mathbb{R} \times TQ$.

Teorema 8.1 *Dato un campo di vettori di Killing* $\vec{\boldsymbol{\xi}} \in \mathfrak{X}(Q)$ *della metrica* $\boldsymbol{g}$*, il campo di vettori verticali* $\vec{\boldsymbol{\Xi}} \in \mathfrak{X}_V(\boldsymbol{Q})$ *indotto da* $\vec{\boldsymbol{\xi}}$ *sul fibrato delle configurazioni* $\boldsymbol{Q}$ *è una simmetria infinitesima per la forma lagrangiana* $\underline{\boldsymbol{L}}$ *e per la forma di Poincaré–Cartan* $\underline{\boldsymbol{\Theta}}_L$*.*

Dimostrazione.

Un campo di vettori di Killing $\vec{\boldsymbol{\xi}} \in \mathfrak{X}(Q)$ della metrica $\boldsymbol{g}$ è un campo di vettori tale che $\mathcal{L}_{\vec{\boldsymbol{\xi}}}\,\boldsymbol{g} = 0$. In coordinate locali si ha $\vec{\boldsymbol{\xi}} = \xi^\alpha(q)\partial_\alpha$ e

$$\mathcal{L}_{\vec{\boldsymbol{\xi}}}\, g_{\alpha\beta} = \xi^\sigma\,\partial_\sigma g_{\alpha\beta} + g_{\lambda\beta}\,\partial_\alpha\xi^\lambda + g_{\alpha\lambda}\,\partial_\beta\xi^\lambda \tag{58}$$

La formula 58 si può riscrivere nel seguente modo

$$\mathcal{L}_{\vec{\boldsymbol{\xi}}}\, g_{\alpha\beta} = \nabla_\alpha \xi^*_\beta + \nabla_\beta \xi^*_\alpha \qquad \text{dove} \qquad \xi^*_\beta = g_{\lambda\beta}\xi^\lambda \tag{59}$$

Il campo di vettori verticali $\vec{\boldsymbol{\Xi}} \in \mathfrak{X}_{V}(\boldsymbol{Q})$ indotto da $\vec{\boldsymbol{\xi}}$ è definito da

$$\vec{\boldsymbol{\Xi}} = 0\frac{\partial}{\partial t} + \xi^\alpha(q)\frac{\partial}{\partial q^\alpha}$$

ed il prolungamento $J^1\vec{\boldsymbol{\Xi}}$ è

$$J^1\vec{\boldsymbol{\Xi}} = 0\frac{\partial}{\partial t} + \xi^\sigma(q)\frac{\partial}{\partial q^\sigma} + \dot{q}^\tau\frac{\partial \xi^\sigma(q)}{\partial q^\tau}\frac{\partial}{\partial \dot{q}^\sigma}$$

Calcolando la derivata di Lie $\mathcal{L}_{J^1\vec{\boldsymbol{\Xi}}}\,\underline{\boldsymbol{L}}$ si ottiene

$$\mathcal{L}_{J^1\vec{\boldsymbol{\Xi}}}\,\underline{\boldsymbol{L}} = J^1\vec{\boldsymbol{\Xi}}(L)\, dt \tag{60}$$

$$\begin{aligned}
J^1\vec{\boldsymbol{\Xi}}(L) &= \left(\xi^\sigma(q)\frac{\partial}{\partial q^\sigma} + \dot{q}^\tau\frac{\partial \xi^\sigma(q)}{\partial q^\tau}\frac{\partial}{\partial \dot{q}^\sigma}\right)\left(\frac{1}{2}g_{\alpha\beta}(q)\dot{q}^\alpha\dot{q}^\beta\right) \\
&= \frac{1}{2}\xi^\sigma\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial q^\sigma}\dot{q}^\alpha\dot{q}^\beta + \frac{1}{2}g_{\alpha\beta}\left(\dot{q}^\tau\frac{\partial \xi^\alpha}{\partial q^\tau}\right)\dot{q}^\beta + \frac{1}{2}g_{\alpha\beta}\dot{q}^\alpha\left(\dot{q}^\tau\frac{\partial \xi^\beta}{\partial q^\tau}\right) \\
&= \frac{1}{2}\xi^\sigma\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial q^\sigma}\dot{q}^\alpha\dot{q}^\beta + \frac{1}{2}g_{\lambda\beta}\left(\dot{q}^\alpha\frac{\partial \xi^\lambda}{\partial q^\alpha}\right)\dot{q}^\beta + \frac{1}{2}g_{\alpha\lambda}\dot{q}^\alpha\left(\dot{q}^\beta\frac{\partial \xi^\lambda}{\partial q^\beta}\right) \\
&= \frac{1}{2}\dot{q}^\alpha\dot{q}^\beta\left(\xi^\sigma\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial q^\sigma} + g_{\lambda\beta}\frac{\partial \xi^\lambda}{\partial q^\alpha} + g_{\alpha\lambda}\frac{\partial \xi^\lambda}{\partial q^\beta}\right) \\
&= \frac{1}{2}\dot{q}^\alpha\dot{q}^\beta\mathcal{L}_{\vec{\boldsymbol{\xi}}}\, g_{\alpha\beta}
\end{aligned} \tag{61}$$

La forma di Poincaré–Cartan $\underline{\Theta}_L$ è definita da

$$\underline{\Theta}_L = \frac{1}{2} g_{\alpha\beta}(q)\dot{q}^\alpha \dot{q}^\beta\, dt + g_{\sigma\tau}(q)\dot{q}^\sigma (dq^\tau - \dot{q}^\tau\, dt) \tag{62}$$

Quindi, la derivata di Lie $\mathcal{L}_{J^1\vec{\Xi}}\,\underline{\Theta}_L$ è

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{J^1\vec{\Xi}}\,\underline{\Theta}_L &= \mathcal{L}_{J^1\vec{\Xi}}\left(\frac{1}{2} g_{\alpha\beta}(q)\dot{q}^\alpha \dot{q}^\beta\, dt\right) + \mathcal{L}_{J^1\vec{\Xi}}\Big(g_{\sigma\tau}(q)\dot{q}^\sigma (dq^\tau - \dot{q}^\tau\, dt)\Big) && (63)\\
&= \frac{1}{2}\dot{q}^\alpha \dot{q}^\beta \mathcal{L}_{\vec{\xi}}\, g_{\alpha\beta}\, dt + J^1\vec{\Xi}\Big(g_{\sigma\tau}\dot{q}^\sigma\Big)\Big(dq^\tau - \dot{q}^\tau\, dt\Big) + g_{\sigma\tau}\dot{q}^\sigma \mathcal{L}_{J^1\vec{\Xi}}\Big(dq^\tau - \dot{q}^\tau\, dt\Big) && (64)\\
&= \frac{1}{2}\dot{q}^\alpha \dot{q}^\beta \mathcal{L}_{\vec{\xi}}\, g_{\alpha\beta}\, dt + \dot{q}^\sigma \mathcal{L}_{\vec{\xi}}\, g_{\sigma\tau}(dq^\tau - \dot{q}^\tau\, dt) && (65)
\end{aligned}$$

Questo conclude la dimostrazione.

In particolare, l'integrale primo associato a $J^1\vec{\Xi}$ è:

$$J^1\vec{\Xi} \,\rfloor\, \underline{\Theta}_L = g_{\sigma\tau}(q)\dot{q}^\sigma \xi^\tau(q) \equiv g_{\tau\sigma}(q)\xi^\tau(q)\dot{q}^\sigma \tag{66}$$

■

8.1 Simmetrie per metriche invarianti su un gruppo di Lie

Applichiamo quanto sviluppato nella precedente sezione al caso in cui lo spazio delle configurazioni Q è un gruppo di Lie G e la metrica $\boldsymbol{g}$ è invariante per moltiplicazione a sinistra. Sappiamo che per ogni campo di vettori $\vec{\boldsymbol{v}}_R \in \mathfrak{X}_R(G)$, invariante per moltiplicazioni a destra, si ha

$$\mathcal{L}_{\vec{\boldsymbol{v}}_R}\,\boldsymbol{g} = 0$$

e, quindi, ogni campo di vettori $\vec{\boldsymbol{v}}_R$ induce un integrale primo per la forma lagrangiana $\underline{\boldsymbol{L}}$.

Analogamente, quando la metrica $\boldsymbol{g}$ è invariante per moltiplicazione a destra, ogni campo di vettori $\vec{\boldsymbol{v}}_L \in \mathfrak{X}_L(G)$, invariante per moltiplicazioni a sinistra, induce un integrale primo per la forma lagrangiana $\underline{\boldsymbol{L}}$.

8.2 Simmetrie per un corpo rigido con un punto fisso

In questo caso sappiamo che lo spazio delle configurazioni Q è diffeomorfo al gruppo di Lie $SO(3)$ e che la lagrangiana è, per costruzione, invariante per moltiplicazioni a sinistra. Scegliamo come coordinate locali gli angoli di Eulero[1] (θ, ϕ, ψ). Indicheremo con $(\vec{\boldsymbol{u}}_1, \vec{\boldsymbol{u}}_2, \vec{\boldsymbol{u}}_3)$ la base ortonormale fissa (inerziale) e con $(\vec{\boldsymbol{e}}_1, \vec{\boldsymbol{e}}_2, \vec{\boldsymbol{e}}_3)$ la base ortonormale solidale col corpo. La relazione fra le due basi è data dalla formula

$$(\vec{\boldsymbol{e}}_1, \vec{\boldsymbol{e}}_2, \vec{\boldsymbol{e}}_3) = (\vec{\boldsymbol{u}}_1, \vec{\boldsymbol{u}}_2, \vec{\boldsymbol{u}}_3) R(\theta, \phi, \psi)$$

dove la rotazione $R(\theta, \phi, \psi)$ è definita da

$$R(\theta, \phi, \psi) = \begin{pmatrix} \cos(\phi) & -\sin(\phi) & 0 \\ \sin(\phi) & \cos(\phi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ 0 & \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(\psi) & -\sin(\psi) & 0 \\ \sin(\psi) & \cos(\psi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

La base per le 1-forme invarianti per moltiplicazione a sinistra sul gruppo $SO(3)$ è

$$\underline{\boldsymbol{\omega}}_L^1 = \sin(\psi)\sin(\theta) d(\phi) + \cos(\psi) d(\theta) \tag{67}$$

[1] θ = angolo di nutazione, ϕ = angolo di precessione, ψ = angolo di rotazione interna.

$$\underline{\boldsymbol{\omega}}_L^2 = \cos(\psi)\sin(\theta)d(\phi) - \sin(\psi)d(\theta) \tag{68}$$

$$\underline{\boldsymbol{\omega}}_L^3 = \cos(\theta)d(\phi) + d(\psi) \tag{69}$$

con base duale (campi di vettori invarianti per moltiplicazioni a sinistra)

$$\vec{\boldsymbol{\lambda}}_1 = \cos(\psi)\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{\sin(\psi)}{\sin(\theta)}\frac{\partial}{\partial\phi} + \frac{\sin(\psi)\cos(\theta)}{\sin(\theta)}\frac{\partial}{\partial\psi} \tag{70}$$

$$\vec{\boldsymbol{\lambda}}_2 = -\sin(\psi)\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{\cos(\psi)}{\sin(\theta)}\frac{\partial}{\partial\phi} - \frac{\cos(\psi)\cos(\theta)}{\sin(\theta)}\frac{\partial}{\partial\psi} \tag{71}$$

$$\vec{\boldsymbol{\lambda}}_3 = \frac{\partial}{\partial\psi} \tag{72}$$

Il vettore velocità angolare $\vec{\boldsymbol{\omega}}$, in componenti rispetto alla base solidale col corpo, è

$$\vec{\boldsymbol{\omega}} = \omega^1\vec{\boldsymbol{e}}_1 + \omega^3\vec{\boldsymbol{e}}_2 + \omega^3\vec{\boldsymbol{e}}_3 \tag{73}$$

dove si è posto

$$\omega^1 = \dot{\phi}\sin(\psi)\sin(\theta) + \dot{\theta}\cos(\psi) \tag{74}$$

$$\omega^2 = \dot{\phi}\cos(\psi)\sin(\theta) - \dot{\theta}\sin(\psi) \tag{75}$$

$$\omega^3 = \dot{\phi}\cos(\theta) + \dot{\psi} \tag{76}$$

Per costruzione, le componenti sono invarianti per moltiplicazioni a sinistra.

Se la base solidale $(\vec{\boldsymbol{e}}_1, \vec{\boldsymbol{e}}_2, \vec{\boldsymbol{e}}_3)$ è una base principale d'inerzia, allora il tensore d'inerzia è diagonale ed il momento della quantità di moto è

$$\vec{\boldsymbol{L}} = I_{11}\left(\omega^1\right)\vec{\boldsymbol{e}}_1 + I_{22}\left(\omega^2\right)\vec{\boldsymbol{e}}_2 + I_{33}\left(\omega^3\right)\vec{\boldsymbol{e}}_3 \tag{77}$$

e la lagrangiana $L = \frac{1}{2}\vec{\boldsymbol{L}} \cdot \vec{\boldsymbol{\omega}}$ è quindi

$$L = \frac{1}{2}\left(I_{11}\left(\omega^1\right)^2 + I_{22}\left(\omega^2\right)^2 + I_{33}\left(\omega^3\right)^2\right) \tag{78}$$

Per costruzione, la lagrangiana L è invariante per moltiplicazioni a sinistra.

Se le forze esterne hanno momento nullo rispetto al punto fisso, sappiamo che il vettore $\vec{\boldsymbol{L}}$ è conservato. Questo vuole dire che le componenti

$$\begin{aligned}
L^1 &= \vec{\boldsymbol{L}} \cdot \vec{\boldsymbol{u}}_1 &(79)\\
&= \quad I_{11}\,\omega^1\Big(\cos(\psi)\cos(\phi) - \sin(\psi)\cos(\theta)\sin(\phi)\Big)\\
&\quad +I_{22}\,\omega^2\Big(-\cos(\psi)\cos(\theta)\sin(\phi) - \cos(\phi)\sin(\psi)\Big) + I_{33}\,\omega^3\Big(\sin(\theta)\sin(\phi)\Big)\\
L^2 &= \vec{\boldsymbol{L}} \cdot \vec{\boldsymbol{u}}_2 &(80)\\
&= \quad I_{11}\,\omega^1\Big(\cos(\psi)\sin(\phi) + \sin(\psi)\cos(\theta)\cos(\phi)\Big)\\
&\quad +I_{22}\,\omega^2\Big(\cos(\psi)\cos(\theta)\cos(\phi) - \sin(\phi)\sin(\psi)\Big) + I_{33}\,\omega^3\Big(-\sin(\theta)\cos(\phi)\Big)\\
L^3 &= \vec{\boldsymbol{L}} \cdot \vec{\boldsymbol{u}}_3 &(81)\\
&= I_{11}\,\omega^1\Big(\sin(\psi)\sin(\theta)\Big) + I_{22}\,\omega^2\Big(\cos(\psi)\sin(\theta)\Big) + I_{33}\,\omega^3\Big(\cos(\theta)\Big)
\end{aligned}$$

di $\vec{\boldsymbol{L}}$ rispetto alla base fissa sono integrali primi delle equazioni del moto.

La base per le 1-forme invarianti per moltiplicazione a destra sul gruppo $SO(3)$ è

$$\underline{\boldsymbol{\omega}}_R^1 = \sin(\theta)\sin(\phi)\,d(\psi) + \cos(\phi)\,d(\theta) \tag{82}$$

$$\underline{\boldsymbol{\omega}}_R^2 = -\sin(\theta)\cos(\phi)\,d(\psi) + \sin(\phi)\,d(\theta) \tag{83}$$

$$\underline{\boldsymbol{\omega}}_R^3 = \cos(\theta)\,d(\psi) + d(\phi) \tag{84}$$

con base duale (campi di vettori invarianti per moltiplicazioni a destra)

$$\vec{\boldsymbol{\rho}}_1 = \cos(\phi)\frac{\partial}{\partial\theta} - \frac{\sin(\phi)\cos(\theta)}{\sin(\theta)}\frac{\partial}{\partial\phi} + \frac{\sin(\phi)}{\sin(\theta)}\frac{\partial}{\partial\psi} \tag{85}$$

$$\vec{\boldsymbol{\rho}}_2 = \sin(\phi)\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{\cos(\phi)\cos(\theta)}{\sin(\theta)}\frac{\partial}{\partial\phi} - \frac{\cos(\phi)}{\sin(\theta)}\frac{\partial}{\partial\psi} \tag{86}$$

$$\vec{\boldsymbol{\rho}}_3 = \frac{\partial}{\partial\phi} \tag{87}$$

Dalla metrica $\boldsymbol{g} = g_{\alpha\beta}(q)dq^\alpha \otimes dq^\beta$ e dal campo di vettori $\vec{\boldsymbol{\xi}} = \xi^\sigma(q)\partial_\sigma$, gli integrali primi definiti da (66) sono quindi definibili nel seguente modo.

Per prima cosa consideriamo la 1–forma

$$\big(\vec{\boldsymbol{\xi}}\big)^\flat = \vec{\boldsymbol{\xi}} \rfloor \boldsymbol{g} = g_{\sigma\beta}(q)\xi^\sigma(q)dq^\beta\,. \tag{88}$$

Poi solleviamo $\big(\vec{\boldsymbol{\xi}}\big)^\flat$ a $J^1\boldsymbol{Q} \equiv \mathbb{R}\times TQ$. Calcolando la parte orizzontale della 1–forma così ottenuta si ottiene

$$h\Big((\vec{\boldsymbol{\xi}})^{\flat}\Big) = g_{\sigma\beta}(q)\xi^{\sigma}(q)\dot{q}^{\beta}dt\,. \tag{89}$$

ed il coefficiente

$$\frac{\partial}{\partial t}\lrcorner\, h\Big((\vec{\boldsymbol{\xi}})^{\flat}\Big) = g_{\sigma\beta}(q)\xi^{\sigma}(q)\dot{q}^{\beta} \tag{90}$$

della 1-forma orizzontale (89) coincide con la formula (66).

La lagrangiana (78) è generata dalla metrica

$$\boldsymbol{g} = I_{11}\,\underline{\boldsymbol{\omega}}_L^1 \otimes \underline{\boldsymbol{\omega}}_L^1 + I_{22}\,\underline{\boldsymbol{\omega}}_L^2 \otimes \underline{\boldsymbol{\omega}}_L^2 + I_{33}\,\underline{\boldsymbol{\omega}}_L^3 \otimes \underline{\boldsymbol{\omega}}_L^3 \tag{91}$$

che, per costruzione, è invariante per moltiplicazioni a sinistra. L'invarianza implica che i vettori $\vec{\boldsymbol{\rho}}_1$, $\vec{\boldsymbol{\rho}}_2$ e $\vec{\boldsymbol{\rho}}_3$ siano una base per i vettori di Killing della metrica (91). Gli integrali primi corrispondenti saranno:

$$\begin{aligned} &I_{11}\left(\vec{\boldsymbol{\rho}}_1\lrcorner\,\underline{\boldsymbol{\omega}}_L^1\right)\omega^1 + I_{22}\left(\vec{\boldsymbol{\rho}}_1\lrcorner\,\underline{\boldsymbol{\omega}}_L^2\right)\omega^2 + I_{33}\left(\vec{\boldsymbol{\rho}}_1\lrcorner\,\underline{\boldsymbol{\omega}}_L^3\right)\omega^3 = \\ &I_{11}\Big(\cos(\psi)\cos(\phi) - \sin(\psi)\cos(\theta)\sin(\phi)\Big)\,\omega^1 + \\ &I_{22}\Big(-\cos(\psi)\cos(\theta)\sin(\phi) - \cos(\phi)\sin(\psi)\Big)\,\omega^2 + I_{33}\Big(\sin(\phi)\sin(\theta)\Big)\,\omega^3 \equiv L^1 \end{aligned} \tag{92}$$

per il primo vettore $\vec{\boldsymbol{\rho}}_1$,

$$\begin{aligned} &I_{11}\left(\vec{\boldsymbol{\rho}}_2\lrcorner\,\underline{\boldsymbol{\omega}}_L^1\right)\omega^1 + I_{22}\left(\vec{\boldsymbol{\rho}}_2\lrcorner\,\underline{\boldsymbol{\omega}}_L^2\right)\omega^2 + I_{33}\left(\vec{\boldsymbol{\rho}}_2\lrcorner\,\underline{\boldsymbol{\omega}}_L^3\right)\omega^3 = \\ &I_{11}\Big(\cos(\psi)\sin(\phi) + \sin(\psi)\cos(\theta)\cos(\phi)\Big)\,\omega^1 + \\ &I_{22}\Big(\cos(\psi)\cos(\theta)\cos(\phi) - \sin(\phi)\sin(\psi)\Big)\,\omega^2 + I_{33}\Big(-\cos(\phi)\sin(\theta)\Big)\,\omega^3 \equiv L^2 \end{aligned} \tag{93}$$

per il secondo vettore $\vec{\boldsymbol{\rho}}_2$, e

$$\begin{aligned} I_{11}\left(\vec{\boldsymbol{\rho}}_3 \lrcorner\, \underline{\boldsymbol{\omega}}^1_L\right)\omega^1 + I_{22}\left(\vec{\boldsymbol{\rho}}_3 \lrcorner\, \underline{\boldsymbol{\omega}}^2_L\right)\omega^2 + I_{33}\left(\vec{\boldsymbol{\rho}}_3 \lrcorner\, \underline{\boldsymbol{\omega}}^3_L\right)\omega^3 & = \\ I_{11}\Big(\sin(\psi)\sin(\theta)\Big)\,\omega^1 + I_{22}\Big(\cos(\psi)\sin(\theta)\Big)\,\omega^2 + I_{33}\Big(\cos(\theta)\Big)\,\omega^3 & \equiv L^3 \end{aligned} \tag{94}$$

per il terzo vettore $\vec{\boldsymbol{\rho}}_3$.