Complementi di Metodi Matematici per la Fisica. Esame 12/02/2025

Per passare all'orale sono necessari 17/34 punti. Durata: 2h. Si può usare un formulario personale al massimo di 4 facciate.

Esercizio 1. (10 punti)

La temperatura di una barretta metallica di lunghezza $L = 1$ evolve secondo l'equazione del calore su un intervallo*

$$u_t(x,t) - u_{xx}(x,t) = 0, \quad x \in [0,1], \;\; t \geq 0. \tag{0.1}$$

Si consideri una condizione iniziale di equilibrio a $t = 0$,

$$u(x,0) = T_0, \;\; x \in [0,1], \tag{0.2}$$

dove T_0 è una costante. Per tempi $t > 0$, gli estremi della barretta vengono messi a contatto con due sorgenti di calore a temperatura 0, imponendo le condizioni di bordo:

$$u(0,t) = 0, \quad u(1,t) = 0, \quad \text{per } t > 0. \tag{0.3}$$

Si scriva la soluzione per $u(x,t)$ per $t > 0$ con il metodo di Fourier. Per il calcolo dei coefficienti di Fourier si può fare riferimento al formulario.

Nota: Date le condizioni fisiche del problema, non ci si preoccupi se la condizione iniziale non soddisfa le condizioni di bordo; il problema è comunque trattabile con il metodo di Fourier, imponendo le condizioni di bordo per tutti i tempi successivi $t > 0$.

Esercizio 2. (10 punti)

Si scriva la soluzione generale della seguente equazione differenziale alle derivate parziali per la grandezza $v(x,y)$:

$$e^y \, v_x(x,y) + x \, v_y(x,y) = e^{2y}, \;\; (x,y) \in \mathbb{R}^2, \tag{0.4}$$

evidenziando l'eventuale dipendenza da parametri o funzioni arbitrarie.

*Si assume coefficiente di diffusività $\alpha = 1$.

Esercizio 3. (7 punti) Si consideri la seguente equazione differenziale ordinaria per una grandezza $F(t)$,

$$F''(t) + \left(\sin(t^{-1}) - 4t^2\right) F(t) = 0. \tag{0.5}$$

- (2 punti) Si indichi quali sono i punti singolari dell'equazione, specificando se siano fuchsiani o meno (NON è necessario calcolare gli indici nei punti fuchsiani).
- (5 punti) Si consideri l'equazione nel limite $t \to +\infty$, calcolando i primi due termini dello sviluppo asintotico di

  $$S(t) \equiv \log F(t),$$

  per una soluzione particolare che soddisfa $F(t) \to 0$ per $t \to +\infty$.

  Suggerimento: È giustificato assumere $(S')^2 >> |S''|$ nel limite.

Esercizio 4. (7 punti)

Si consideri una variazione del problema dell'Esercizio 1: ora la barretta viene scaldata dall'esterno in modo uniforme. Il processo è descritto da un'equazione del calore inomogenea

$$u_t(x,t) - u_{xx}(x,t) = C, \quad x \in [0,1], \; t \geq 0, \tag{0.6}$$

dove C è un parametro proporzionale alla quantità di calore fornita per unità di tempo.

Sotto queste condizioni, si consideri l'evoluzione di una condizione iniziale nulla,

$$u(x,0) = 0, \quad x \in [0,1], \tag{0.7}$$

con le condizioni di bordo:

$$u(0,t) = 0, \quad u(1,t) = 0, \quad t \geq 0. \tag{0.8}$$

- (6 punti) Si calcoli $u(x,t)$ per $t > 0$ usando il metodo di Fourier. Per il calcolo dei coefficienti di Fourier si può fare riferimento al formulario.

  Suggerimento: Si considerino generici coefficienti di Fourier dipendenti dal tempo, ricavando l'equazione differenziale che soddisfano. Il formulario allegato può essere utile.
- (1 punto) Si trovi la condizione di equilibrio raggiunta da $u(x,t)$ per $t \to +\infty$.

  Suggerimento: Si noti che la risposta a quest'ultimo quesito può essere trovata in due modi: considerando soluzioni stazionarie di (0.6), oppure partendo dalla soluzione completa scritta come serie e prendendo il limite di grande t.

Formulario. Esame Febbraio 2025

Alcune di queste equazioni (non necessariamente tutte!) possono essere utili.

Proprietà di ortogonalità per funzioni trigonometriche: per $m, n \in \mathbb{N}$:

$$\frac{2}{L}\int_0^L \sin(\frac{n\pi x}{L})\sin(\frac{m\pi x}{L})dx = \frac{2}{L}\int_0^L \sin(\frac{(n+\frac{1}{2})\pi x}{L})\sin(\frac{(m+\frac{1}{2})\pi x}{L})dx = \delta_{m.n}, \tag{0.9}$$

$$\frac{2}{L}\int_0^L \cos(\frac{n\pi x}{L})\cos(\frac{m\pi x}{L})dx = \delta_{m.n}\, 2^{\delta_{n,0}}. \tag{0.10}$$

Integrali notevoli. Alcuni di questi integrali (non tutti!) possono essere utili:

$$2\int_0^1 \sin(n\pi x)dx = \frac{2(1-(-1)^n)}{n\pi}, \quad n \in \mathbb{N}^+, \tag{0.11}$$

$$2\int_0^1 \cos(n\pi x)dx = 2\delta_{n,0} \quad n \in \mathbb{N}, \tag{0.12}$$

$$2\int_0^1 \sin(n\pi x)\, x dx = \frac{(-1)^{n+1}}{n\pi}, \quad n \in \mathbb{N}^+, \tag{0.13}$$

$$2\int_0^1 \sin(n\pi x)\, x^2 dx = \frac{(-1)^{n+1}}{n\pi} + \frac{4\left((-1)^n - 1\right)}{\pi^3 n^3}, \quad n \in \mathbb{N}^+, \tag{0.14}$$

$$2\int_0^1 \cos(n\pi x)\, x dx = \frac{2\left((-1)^n - 1\right)}{\pi^2 n^2}, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{0.15}$$

Soluzioni di equazioni differenziali inomogenee. Per velocizzare i calcoli si forniscono le soluzioni generali di alcune equazioni differenziali (non tutte utili all'esame).

- L'equazione differenziale lineare inomogenea per $f(t)$:

  $$f'(t) + k^2 f(t) = g(t), \tag{0.16}$$

  dove $g(t)$ è una funzione nota, ha una soluzione generale data da

  $$f(t) = \int_a^t e^{-k^2(t-s)} g(s) ds, \tag{0.17}$$

  dove a è un parametro arbitrario.

- L'equazione del secondo ordine inomogenea

  $$f''(t) + k^2 f(t) = g(t), \tag{0.18}$$

  ha una soluzione generale data da

  $$f(t) = a_1 \sin(kt) + a_2 \cos(kt) + \frac{1}{k}\int_0^t \sin\left(k(t-s)\right) g(s) ds, \tag{0.19}$$

  dove a_1, a_2 sono parametri arbitrari.