Esercizi di Informatica A per le lezioni dell'11-12 novembre 2021

Parte I - Esercizi sui grafi

a) Le dieci città principali del regno di Banania sono così collegate da strade:

Strada	Città collegate	Lunghezza (km)
SS1	Acerorosso - Bananopoli	50
SS2	Bananopoli - Lamponeggia	80
SS3	Bananopoli - Cedrosa	30
SS4	Lamponeggia - Cedrosa	50
SS5	Acerorosso - Lamponeggia	25
SS6	Acerorosso - Dolcemela	60
SS7	Lamponeggia - Dolcemela	20
SS8	Cedrosa - Erbavoglio	35
SS9	Dolcemela - Erbavoglio	40
SS10	Acerorosso - Finoporto	45
SS11	Finoporto - Giuggiolo	60
SS12	Dolcemela - Giuggiolo	80
SS13	Dolcemela - Indacovia	90
SS14	Erbavoglio - Hoppavilla	70
SS15	Hoppavilla - Indacovia	45
SS16	Giuggiolo - Indacovia	55

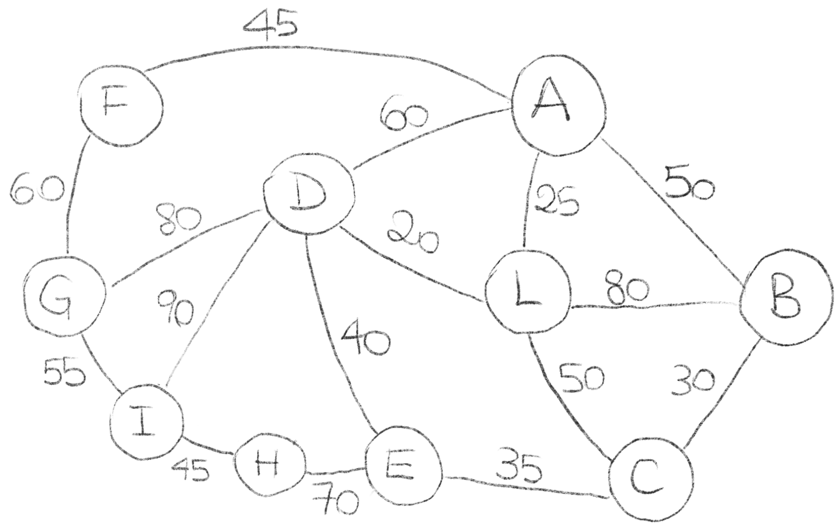
Disegnare un grafo che rappresenti la rete stradale di Banania. Ogni città sarà un cerchio ("nodo" del grafo) e ogni strada una linea di collegamento ("arco" del grafo). Sulle strade riporteremo le lunghezze.

Una volta disegnato il grafo rispondere alle seguenti domande:

- qual è la strada più **breve** (in km) fra Bananopoli e Hoppavilla? e qual è la strada più **diretta** ossia che passa per meno città intermedie?
- E la strada più breve fra Giuggiolo e Cedrosa? e quella più diretta?
- Riesci a trovare un percorso che da Indacovia porti a Bananopoli passando per **tutte** le altre città, ma una sola volta? Qual è? Quanto è lungo?

Soluzione

La figura sottostante rappresenta come grafo la tabella dei collegamenti fra città; ogni città è indicata dalla propria iniziale. Naturalmente la posizione delle città sul grafo è arbitraria, ossia ciascuno nella sua soluzione può disporle come vuole; l'importante è che siano riprodotti i collegamenti giusti con le distanze corrette accanto al collegamento. Questa disposizione delle città sul grafo è però pensata per visualizzare in modo chiaro i collegamenti, senza che siano troppo "annodati". Questo ci aiuterà anche a rispondere alle domande.



Da Bananopoli a Hoppavilla

La strada più diretta (con meno città intermedie) è sicuramente B-C-E-H, che è lunga 30+35+70 = 135. Questa è anche una candidata ad essere la più corta; potrebbero esserci però delle scorciatoie. Intanto vediamo se per caso ci sono scorciatoie per i singoli pezzi che compongono questo percorso.

- fra Bananopoli e Cedrosa la via più breve è sicuramente quella diretta: Cedrosa è la città più vicina a Bananopoli
- anche fra Cedrosa ed Erbavoglio la via più breve è quella diretta: se passassi da L anche solo per arrivare lì mi ci vorrebbero 50km (contro i 35 fra C ed E); se provassi a tornare indietro verso B dovrei sicuramente fare un giro molto lungo (30km solo per arrivare a B + almeno 50 per arrivare altrove)
- infine, anche fra Erbavoglio e Hoppavilla la via diretta è la più breve: per arrivare ad H in modo diverso dovrei per forza uscire da E in un'altra direzione (e quella più vicina è C con 35km) e allargare il giro per ritornare verso H da I (e quest'ultimo pezzo mi costerebbe 45km). Quindi un qualunque altro giro richiederebbe sicuramente più di 80km contro i 70 della via diretta.
- potrei poi cercare una scorciatoia fra Bananopoli ed Erbavoglio che non passi per Cedrosa. Il percorso B-C-E è lungo 65km; vediamo subito che se da Bananopoli ci dirigiamo altrove, per ritornare verso Erbavoglio superiamo questo limite.
- infine potrei cercare una scorciatoia fra Cedrosa e Hoppavilla (C-E-H è lungo 105km) ma anche qui l'unico altro modo di arrivare ad Hoppavilla è fare il giro da I, che risulta immediatamente molto più lungo.

Questo ragionamento ci permette di dire che, se esiste una strada più corta di B-C-E-H fra Bananopoli e Hoppavilla, questa deve passare per città completamente diverse (ossia non deve passare né da C né da E)

Le strade di questo tipo sono:
B-L-D-I-H → 80+20+90+45 = 235 km
B-L-D-G-I-H → 80+20+80+55+45 = 280km
B-A-L-D-I-H → 50+25+20+90+45 = 230km
B-A-L-D-G-I-H → 50+25+20+80+55+45 = 275km
B-A-D-I-H → 50+60+90+45 = 245km
B-A-D-G-I-H → 50+60+80+55+45 = 290km
B-A-F-G-I-H → 50+45+60+55+45 = 255km
B-L-A-F-G-D-I-H → 80+25+45+60+55+45 = 310km
B-L-A-D-I-H → 80+25+60+90+45 = 300km
B-L-A-D-G-I-H → 80+25+60+80+55+45 = 345km
B-L-A-F-G-I-H → 80+25+45+60+55+45 = 310km
B-L-D-A-F-G-I-H → 80+20+60+45+60+55+45 = 365km

Come si vede nessuno di questi percorsi è più breve del percorso B-C-E-H, che quindi oltre ad essere il più diretto è anche il più corto.

Da Giuggiolo a Cedrosa

Il percorso più diretto è sicuramente G-D-L-C, che è lungo 80+20+50 = 150km

Come prima vediamo se ci sono scorciatoie su questo percorso. Guardando il grafo si può vedere che:

- Da Giuggiolo a Dolcemela **non** ci sono percorsi più brevi di quello diretto (80km)
- Da Dolcemela a Lamponeggia **non** ci sono percorsi più brevi di quello diretto (20km, è il percorso più breve sul grafo!)
- Da Lamponeggia a Cedrosa pure **non** ci sono percorsi più brevi di quello diretto (50km)
- Vediamo se ci sono scorciatoie da Giuggiolo a Lamponeggia (100km col percorso diretto G-D-L): ma guardando il grafo vediamo che sia passando da Acerorosso, sia passando da Hoppavilla e Indacovia, il percorso si allunga.
- Infine vediamo se ci sono scordciatoie da Dolcemela a Cedrosa (70 km con il percorso diretto D-L-C); l'unico percorso competitivo è D-E-C ma sono 75km, quindi D-L-C vince comunque.

Quindi, se esiste una strada più corta di G-D-L-C da Giuggiolo a Cedrosa, essa non passa né per Dolcemela né per Lamponeggia.

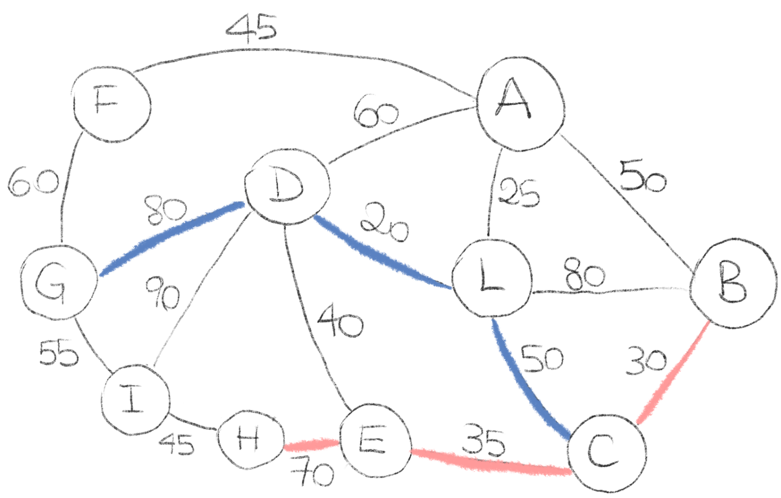
Analizziamo le strade di questo tipo, che non sono molte, perché D ed L sono due "snodi" abbastanza centrali del grafo e poche strade non passano di lì:

G-F-A-B-C → 60+45+50+30 = 195km

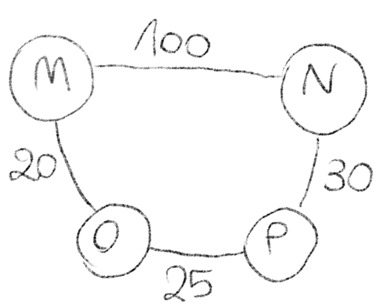
G-I-H-E-C → 55+45+70+35 = 205km

Anche in questo caso dunque la strada più breve coincide con quella più diretta: G-D-L-C

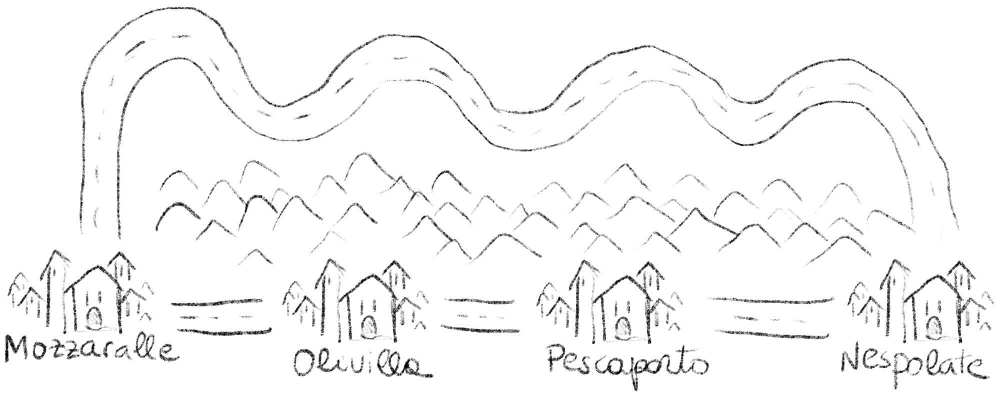
Vediamo le strade che abbiamo trovato disegnate sul grafo:



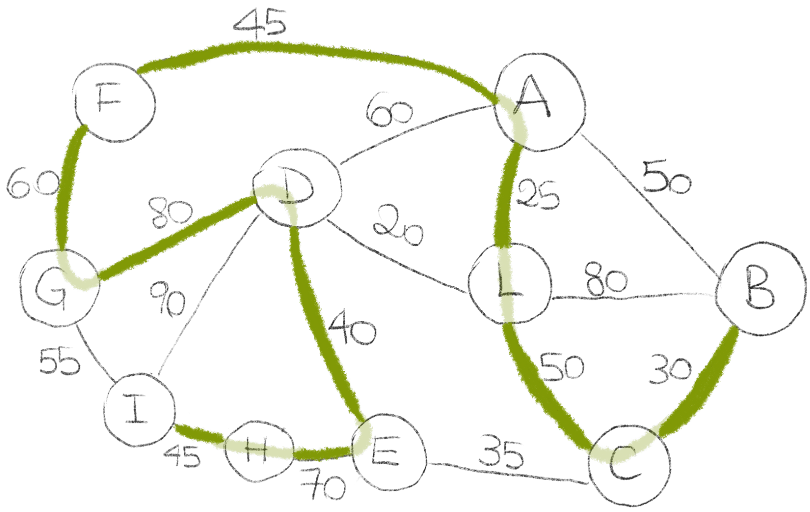
Attenzione: nonostante in questi esempi la strada più diretta e quella più breve siano state sempre coincidenti, non è affatto detto che sia sempre così. Ecco un esempio (con altre città) molto semplice in cui la strada diretta **non** è la più breve:



Può sembrare controintuitivo, perché nel disegno il percorso M-O-P-N sembra più lungo di M-N, anche se i numeri dicono un'altra cosa. Questo perché nelle rappresentazioni a grafo non c'è nessun obbligo di rispettare le proporzioni nelle lunghezze dei collegamenti. Però se lo disegniamo come vedete qui sotto il fatto che la strada diretta **non** sia la più corta è immediatamente evidente:



Rispondiamo infine all'ultima domanda, trovare un percorso che da Indacovia porti a Bananopoli passando per **tutte** le altre città una sola volta, disegnandolo direttamente sul grafo:



Calcoliamone la lunghezza: 45+70+40+80+60+45+25+50+30 = 445 km

b) Valerio, Teresa, Sergio, Nadia, Marco, Luca, Francesca e Beatrice sono compagni di classe. Capita che uno vada a casa dell'altro con il pullman; la seguente tabella riporta quanto tempo ci vuole in media perché uno arrivi dall'altro, in minuti (nelle colonne per brevità ciascuno è indicato dall'iniziale del suo nome). Quando non c'è scritto niente è perché quello spostamento non avviene mai: ad esempio Beatrice non va mai a casa di Teresa.

   Disegnare, a partire dalla tabella, un grafo per rappresentare gli spostamenti fra le case e le loro tempistiche.

   Una piccola difficoltà in più: non è detto che se uno va a casa dell'altro valga anche il viceversa… anzi, in molti casi questo non succede: Marco va da Francesca, ma Francesca non va da Marco. Quando però c'è uno scambio (ad esempio Luca va da Teresa, e anche Teresa va da Luca) il tempo che ci mettono potrebbe essere diverso. Come rappresenteresti queste caratteristiche nel grafo?

Fino a casa di → **Da** casa di ↓	B	F	L	M	N	S	T	V
Beatrice			25	16	18	20		
Francesca					15			
Luca							32	
Marco	13	22						
Nadia			16					
Sergio			28		23			
Teresa			28		22			
Valerio	35			48		42		

Ora provate a rispondere a queste domande:

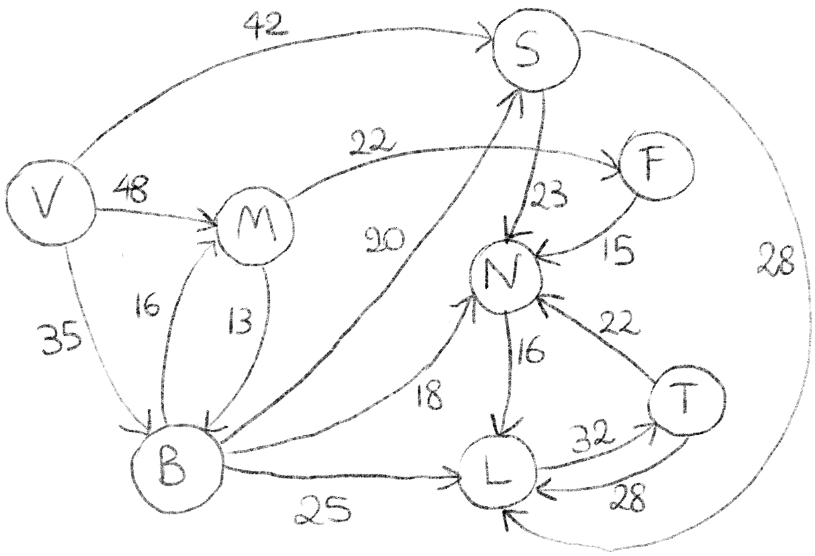
- Uno di questi ragazzi vive un po' fuori città. Chi è secondo voi? Da cosa l'avete capito?
- Chi è il più ospitale? Come lo si capisce dal grafo? E dalla tabella?
- Chi è invece quello che va più in giro? E quello che ci va di meno? Come lo si capisce dal grafo? e dalla tabella?

Soluzione

Vediamo innanzitutto il grafo. Vediamo che a differenza di quello precedente qui ci sono delle frecce. Le frecce servono quando l'informazione che vogliamo rappresentare è **direzionale**, ossia

- l'informazione (in questo caso il tempo di percorrenza) è diversa nelle due direzioni, da A a B è diverso da B ad A
- non sempre entrambe le direzioni sono attive, quindi dobbiamo specificare quale delle due lo è

Un grafo con questa caratteristica si chiama "grafo **orientato**".



Andiamo ora a rispondere alle domande:

- *Uno di questi ragazzi vive un po' fuori città. Chi è secondo voi? Da cosa l'avete capito?*

Il ragazzo che vive fuori città è Valerio: è quello che ci mette di più ad andare da chiunque altro

- *Chi è il più ospitale? Come lo si capisce dal grafo? E dalla tabella?*

Luca e Nadia sono i più ospitali a pari merito: ognuno di loro ha quattro persone che vanno a trovarlo. Per trovare questa informazione è sufficiente contare quante frecce **entrano** a casa di qualcuno. Nella tabella invece posso contare quante caselle occupate ci sono nella **colonna** corrispondente ad una persona. Nelle colonne infatti ci sono le destinazioni, e le destinazioni con più caselle occupate sono le più gettonate.

Possiamo immaginare un "indice di ospitalità" misurato tramite il numero di persone che visitano una casa, e ricostruirlo per tutti i ragazzi dell'esercizio:

- *Chi è invece quello che va più in giro? E quello che ci va di meno? Come lo si capisce dal grafo? e dalla tabella?*

B	F	L	M	N	S	T	V
2	1	**4**	2	**4**	2	1	0

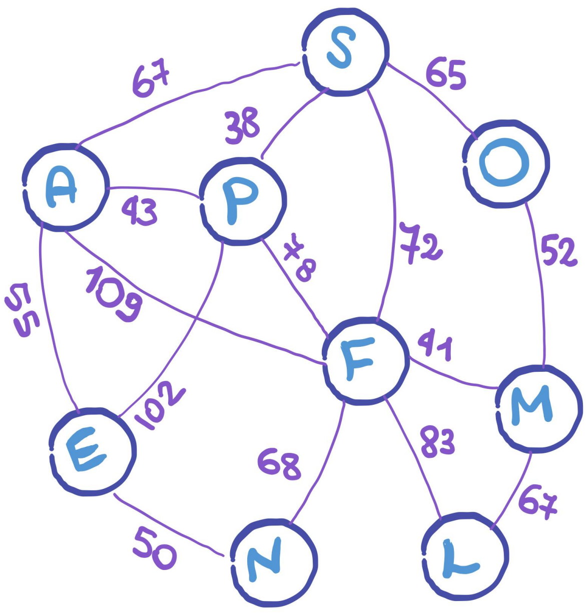
Se prima contavamo le frecce che entrano, qui dobbiamo contare quante frecce **escono** da una casa. Alternativamente possiamo contare nella tabella il numero di caselle occupate sulla **riga** corrispondere a una persona. Nelle righe infatti ci sono le case di partenza, e quante più caselle sono occupate, tanto più la persona in quella casa si sposta per andare da qualcun altro.

Possiamo immaginarci dunque un "indice di mobilità" misurato tramite il numero di persone che si va a visitare. Ecco la tabella:

B	F	L	M	N	S	T	V
4	1	1	2	1	2	2	3

Dalla tabella vediamo che la persona che va più in giro è sicuramente Beatrice. Invece la palma del più stanziale va a pari merito a Francesca, Luca e Nadia, che visitano una sola altra persona.

c) La Repubblica di Micimao (confinante col regno di Banania) ha nove città principali: **A**ngoraville, **E**ast Meowia, **F**elinopolis, **L**ynxia, **M**anxester, **N**ewcat, **O**celocity, **P**urrington e **S**t. Cougar.
Il seguente grafo rappresenta la rete stradale dello stato di Micimao (ogni città è rappresentata dalla sua iniziale):



Compilare la seguente tabella riportando, per ogni coppia di città, la distanza minima su strada fra le due (là dove non c'è un collegamento diretto, la strada migliore andrà trovata…)

Soluzione

km	A	E	F	L	M	N	O	P	S
Angoraville		55	109	192	150	105	132	43	67
East Meowia	55		118	126	159	50	187	98	122
Felinopolis	109	118		83	41	68	93	78	72
Lynxia	192	126	83		67	151	119	161	155
Manxester	150	159	41	67		109	52	119	113
Newcat	105	50	68	151	109		161	146	140
Ocelocity	132	187	93	119	52	161		103	65
Purrington	43	98	78	161	119	146	103		38
St. Cougar	67	122	72	155	113	140	65	38	

Parte II - città fangose

L'esercizio si basa sul gioco delle città fangose presentato nella dispensa. La seguente tabella mostra le case di una città fangosa (prendono il nome dalle famiglie che ci vivono) e quanto costerebbe (in migliaia di euro) asfaltare il percorso da una all'altra. Quando non c'è scritto niente è perché non è possibile asfaltare quel percorso. Inoltre, il percorso da A a B e quello da B ad A prevedono lo stesso costo, per cui la tabella riporta solo uno dei due.

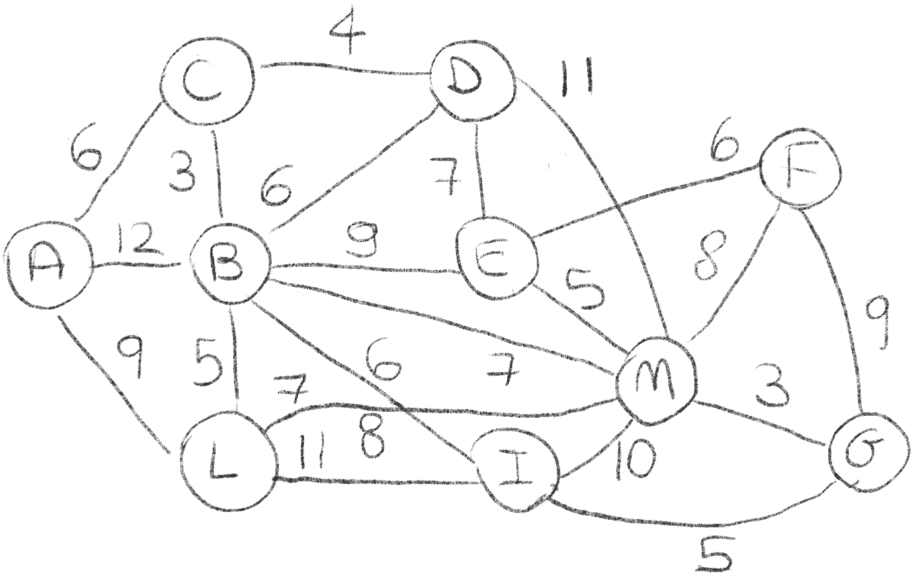
	A	B	C	D	E	F	G	I	L	M
Alberti		12	6						9	
Brambilla			3	6	9			6	5	7
Coletti				4						
Donato					7					11
Erdani						6				5
Fumicola							9			8
Gianone								5		3
Illirio									11	10
Luzzati										8
Mura										

I passaggi sono i seguenti:

- disegnare il grafo della città fangosa (come a pag. 114 della dispensa)
- provare a trovare "a occhio" una soluzione al problema dell'asfaltatura
- provare a trovare una soluzione usando l'algoritmo di Kruskal (descritto brevemente a pag. 115 della dispensa). Per farlo sarà necessario tener traccia mano a mano di quali tratti di strada decidete di asfaltare.
- La soluzione di Kruskal uguale o diversa da quella che avevate trovato "a occhio"? Costa effettivamente di meno?

Soluzione

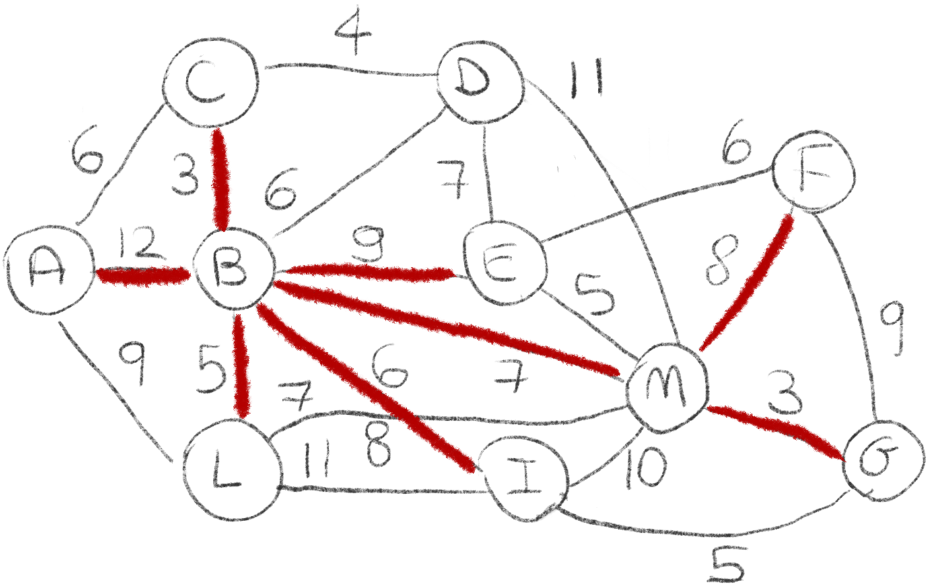
Innanzitutto disegniamo il grafo della città fangosa:



Come nei casi precedenti, il vostro grafo potrebbe avere una forma un po' diversa, l'importante è che i collegamenti siano corretti. Certamente però è più facile lavorarci su se non è troppo annodato; la mia prima versione era molto più annodata di questa e infatti l'ho rifatto! Qualche annodamento però c'è ancora: il collegamento fra L e M si incrocia con quello fra B e I, e anche i collegamenti D-M e E-F si incrociano. Pazienza!

- *provare a trovare "a occhio" una soluzione al problema dell'asfaltatura*

Anche qui, ognuno avrà trovato la sua soluzione.
Per essere una soluzione valida deve soprattutto “coprire” tutte le case, ossia non devono esserci case che restano scollegate.
Se siete stati furbi inoltre non avete messo collegamenti **inutili**: un collegamento è inutile se collega due case che sono già raggiungibili in altro modo.
Ecco una soluzione a occhio:



Una sottorete con queste caratteristiche, ossia che (a) collega tutti i nodi e (b) non contiene collegamenti inutili è detta “spanning tree”. Noi però vogliamo trovare il *minimal spanning tree*, ossia quello che costa meno.
Andiamo quindi al punto successivo:

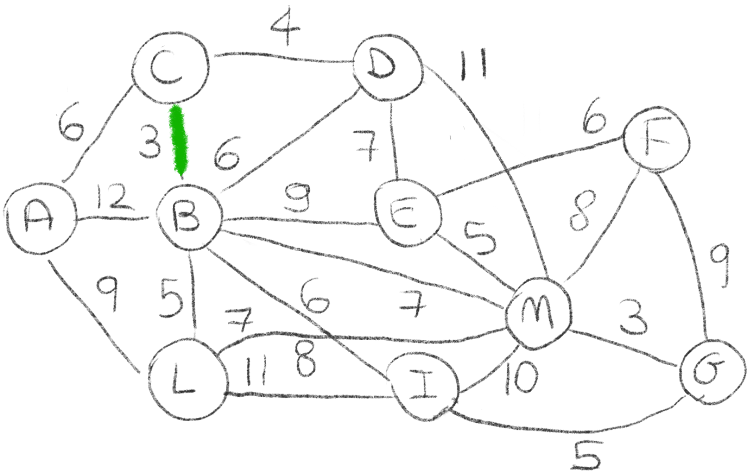
- *provare a trovare una soluzione usando l’algoritmo di Kruskal (descritto brevemente a pag. 115 della dispensa).*

L’algoritmo di Kruskal prevede di ripetere la seguente azione:

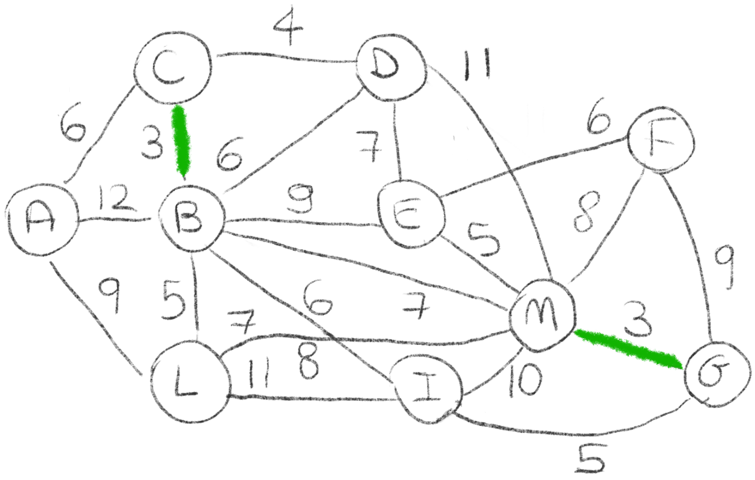
“aggiungi il collegamento che costa meno, escludendo quelli inutili”

fino a che non si sono collegati tutti i nodi (le nostre case). A quel punto infatti **tutti** i collegamenti sarebbero inutili!

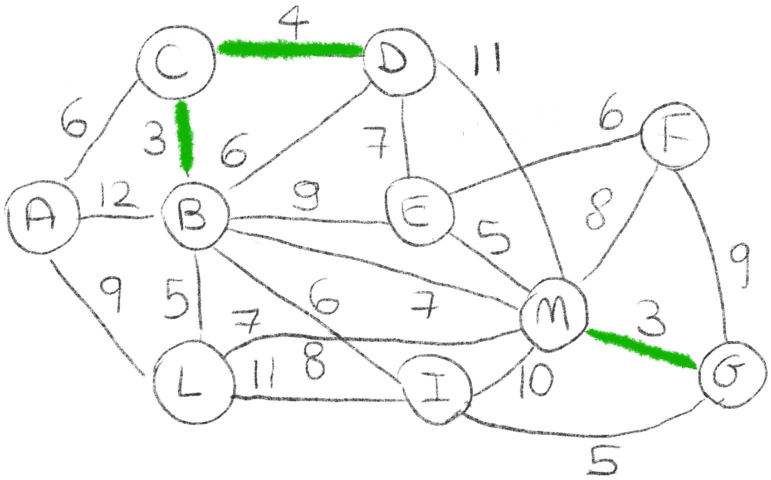
Procediamo passo passo. Il costo minore disponibile è 3, che troviamo ad esempio sul collegamento fra B e C, quindi lo aggiungiamo (potremmo anche aggiungere M-G, che pure costa 3: è equivalente).



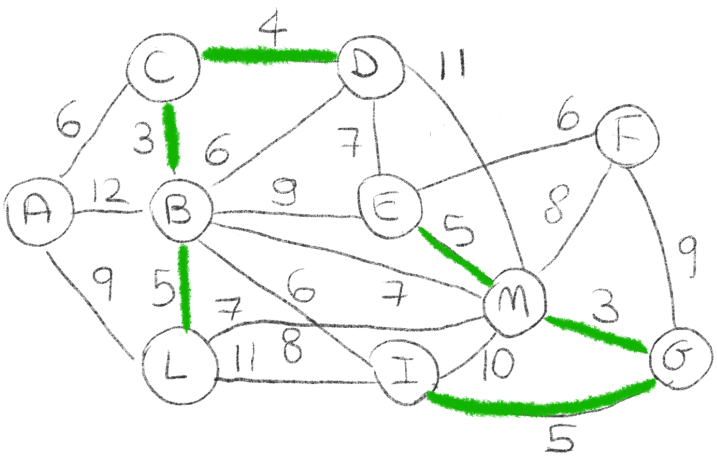
Ora dobbiamo di nuovo cercare il collegamento con costo minore, che naturalmente è M-G, sempre di costo 3. Dobbiamo chiederci se è un collegamento inutile. La risposta è no, non è inutile, perché M e G non sono ancora collegati in nessun modo. Quindi aggiungiamo anche questo.



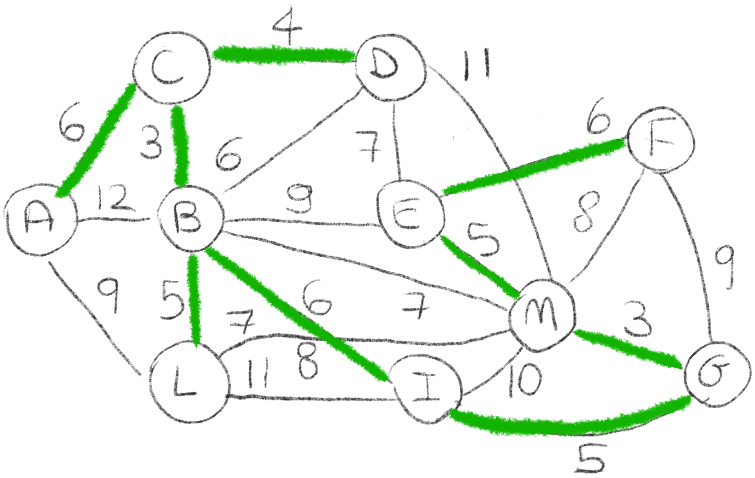
Ora il collegamento più economico fra tutti è C-D, che costa 4. Non è inutile, perché D non è ancora collegato in alcun modo alla rete, quindi lo aggiungiamo:



Il costo più basso disponibile adesso è 5. Ci sono tre collegamenti con questo costo: B-L, E-M e I-G.
Nessuno dei tre è inutile, né rispetto alla rete disegnata, né uno rispetto all'altro: infatti B-L permettere di aggiungere alla rete la casa L, E-M permettere di aggiungere alla rete la casa E, e I-G permette di aggiungere alla rete la casa I. Nessuna di queste tre case era collegata prima. Quindi procediamo aggiungendo tutti e tre i collegamenti. Se non siete sicuri aggiungeteli sempre uno per volta: se costano uguale l'ordine in cui li aggiungerete sarà irrilevante. Magari le reti risultanti saranno diverse, ma saranno sempre le più economiche possibili.
Ad ogni modo, aggiungendo i tre collegamenti di costo 5 otteniamo:



Ora dobbiamo valutare i collegamenti di costo 6. Ce n'è uno inutile: B-D (B e D sono già collegati fra loro tramite C). Invece: A-C non è inutile (A è ancora scollegato); E-F non è inutile (F è ancora scollegato) e B-I non è inutile (ci permette di unire insieme i due pezzi di rete sinora costruiti e che non erano ancora uniti fra loro). Ecco il risultato:



Possiamo notare che ora tutti i nodi sono collegati in rete. Il nostro lavoro è finito: tutti i collegamenti restanti sono inutili.

- *La soluzione di Kruskal uguale o diversa da quella che avevate trovato "a occhio"? Costa effettivamente di meno?*

E' abbastanza immediato notare che nel mio caso le due soluzioni sono diverse.
Calcoliamo il costo di quella "a occhio", sommando i costi dei singoli collegamenti che ne fanno parte:
12 + 3 + 5 + 6 + 7 + 9 + 3 + 8 = 53

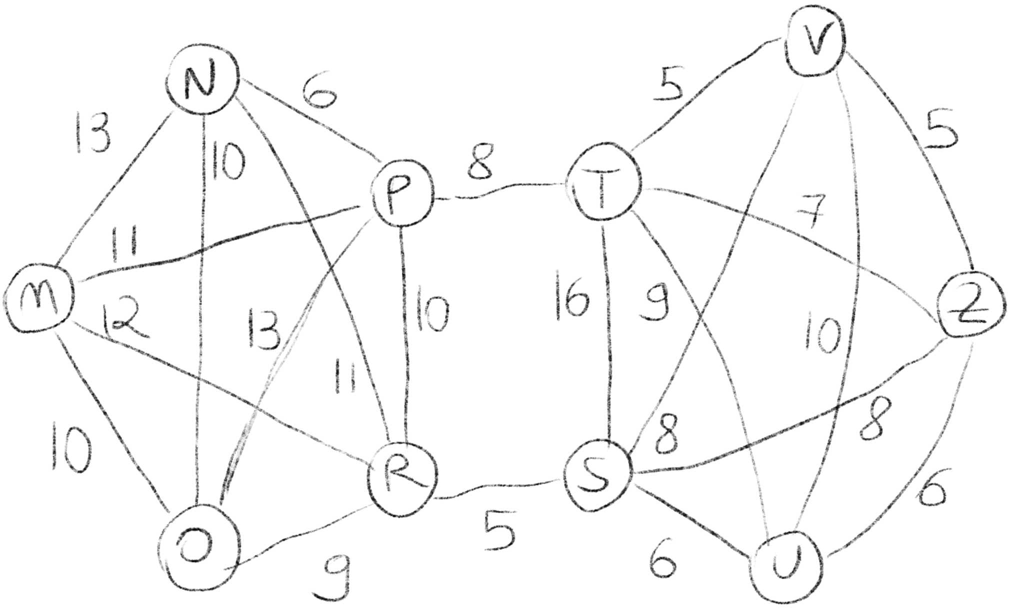
Ora calcoliamo il costo della soluzione di Kruskal:
6 + 4 + 3 +5 +6 +5 +3 + 5 + 6 = 43

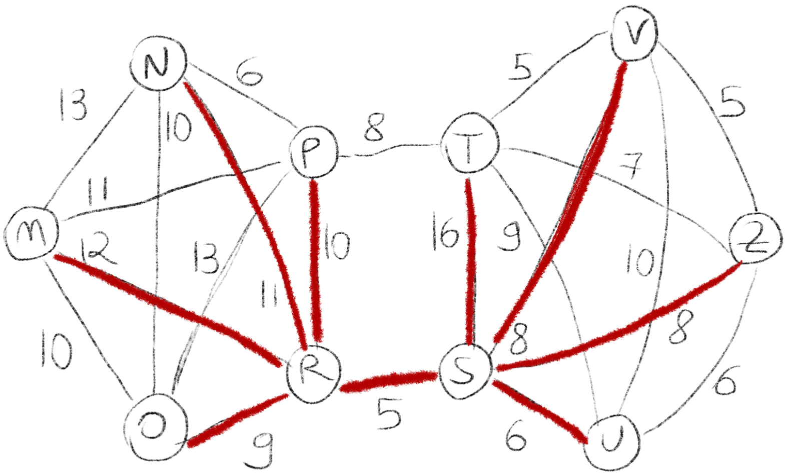
Effettivamente la soluzione di Kruskal è più economica.

Risolviamo ora (un po' più rapidamente) anche la seconda città fangosa:

	M	**N**	**O**	**P**	**R**	**S**	**T**	**U**	**V**	**Z**
Mariani		13	10	11	12					
Nedda			10	6	11					
Ortani				13	9					
Pozzo					10		8			
Rugato						5				
Santini							16	6	8	8
Terna								9	5	7
Uscari									10	6
Viola										5
Zante										

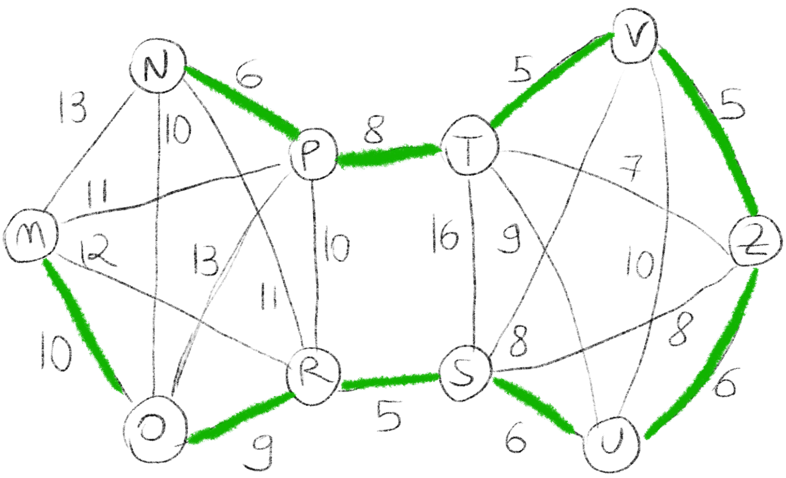
Ecco il grafo della città, e anche una prima soluzione trovata ad "occhio".





Questa soluzione “a occhio” ha un costo di 12 + 11 + 9 + 10 + 5 + 16 + 9 + 6 + 8 = 86

Ora vediamo invece la soluzione che si ottiene con l’algoritmo di Kruskal:



Questa soluzione ha un costo di 10 + 9 + 5 + 6 + 6 + 5 + 5 + 8 + 6 = 60 e dunque è migliore della precedente.